MASTER 2
Parcours:
"Probabilités et Modèles Aléatoires"

Sorbonne Université

Brochure 2025–2026

Trois majeures, Nouveaux cours optionnels

01/12/2025

OBJECTIFS

L'objectif du parcours "PROBABILITÉS ET MODELES ALEATOIRES" de la seconde année du Master de Sorbonne Université, est de délivrer une formation de haut niveau en probabilités théoriques et appliquées.

En 2025–2026, nous proposons **TROIS majeures** aux étudiants en fonction des cours suivis et du sujet de mémoire ou de stage :

- *Processus Stochastiques*
- *Probabilités et Equations aux Dérivées Partielles* (en commun avec le parcours M2 "Mathématiques de la Modélisation" de Sorbonne Université)
- Probabilités Appliquées

Les deux premières majeures préparent les étudiants à une carrière de chercheur (ou enseignant-chercheur) en milieu académique, la troisième – à une carrière en milieu industriel, en passant par des stages et des thèses CIFRE.

CO-HABILITATIONS

Le master est co-habilité avec l'Ecole Normale Supérieure de Paris et avec l'Ecole des Ponts ParisTech.

CRITÈRES DE SÉLÉCTION

Le principal critère de sélection est un prérequis solide en mathématiques générales, et en particulier en théorie de la mesure et de l'intégration, en calcul des probabilités.

Cette spécialité s'adresse aux étudiants provenant du Master 1 de mathématiques et aux titulaires d'un Master 1 ou d'une maîtrise de *Mathématiques*, de *Mathématiques Appliquées*, ou d'*Ingénierie Mathématique*. Elle est également ouverte aux titulaires d'une maîtrise M.A.S.S., ou d'un diplôme d'ingénieur (ou éventuellement de deux ans d'études dans une école d'ingénieurs), **sous réserve d'une formation suffisante en mathématiques, et notamment en probabilités**.

PREREQUIS POUR LES ETUDIANTS DE SORBONNE UNIVERSITE

Pour les étudiants de Sorbonne Université il est *indispensable* d'avoir validé avec de bonnes notes

• Le cours "Mesure et Intégration" en L3

et

• Le cours "Probabilités II" au second semestre de L3 et le cours "Probabilités Approfondies" au premier semestre de M1.

Il est *indispensable* d'avoir validé avec de bonnes notes d'autres modules de mathématiques pour avoir une culture large et solide.

Il est également indispensable d'avoir validé un cours de Statistiques mathématiques pour les étudiants qui souhaitent intégrer la Majeure "Probabilités Appliquées".

Un cours de Programmation est très souhaitable pour ceux qui s'orienteront vers des stages, des thèses CIFRE, et une carrière en entreprise.

DÉBOUCHÉS

La vocation principale de la spécialité est de former de futurs chercheurs en calcul de probabilités. Pour cette raison, la majorité des étudiants qui réussissent cette spécialité s'orientent ensuite vers le **Doctorat**, troisième composante du LMD en préparant une thèse.

La thèse peut être préparée après l'obtention du Master en s'inscrivant en Doctorat pour une durée de 2 à 4 ans en principe. Cette inscription est subordonnée à l'acceptation de l'étudiant par un " directeur de thèse".

Des allocations de recherche sont attribuées aux étudiants en thèse, sur critères *pédagogiques.*

Plusieurs étudiants préparent une thèse au sein du *Laboratoire de Probabilités Statistiques et Modélisation,* de Sorbonne Université.

Les étudiants peuvent aussi préparer une thèse au sein d'autres laboratoires de recherche (universitaires ou de grandes écoles) ainsi que dans des instituts de recherche (l'INRIA, l'INRA, et autres) en France et à l'étranger.

Les étudiants qui ont choisi l'orientation "Probabilités Appliquées" le font en entreprise sous la forme de contrats CIFRE (ORANGE, EDF, CEA, AREVA, SAFRAN, SCHLUMBERGER,...).

Cette formation fournit aussi des débouchés professionnels immédiats dans des entreprises, notamment dans des banques, des sociétés d'assurance, ou des organismes financiers.

Finalement, ce master constitue un atout de carrière pour les enseignants de mathématiques agrégés dans des lycées et des classes préparatoires.

ORGANISATION DE L'ANNÉE : Cours, stage, mémoire

Premier semestre (30ECTS) (Septembre-Janvier) L'année commence par *deux cours intensifs de prérentrée* en Probabilités et en Statistiques en septembre : leur objectif est de faire un point sur les connaissances en probabilités acquises en M1 qui seront constamment utilisées en M2. Ces cours durent deux semaines et ne donnent pas lieu à un examen.

Le premier semestre est accredité de 30 ECTS. TOUS les étudiants suivent 15 ECTS de cours du tronc commun

- "Calcul Stochastique et Processus de Diffusions"(9 ECTS)
- "Modèles Markoviens Discrets" (6 ECTS)

Par ailleurs, les étudiants de la majeure "*Processus stochastiques*" suivent 15 ECTS de cours

- "Processus de Markov et Applications" (3ECTS)
- "Convergence de Mesures, Grandes Déviations, Percolation" (6ECTS)
- "Nuages Poissoniens, Processus de Levy et Excursions"(6 ECTS).

Les étudiants de la majeure "*Probabilités Appliquées*" suivent 15 ECTS de cours

- "Probabilités numériques et Méthodes de Monte Carlo" (9ECTS),
- "Statistique et Apprentissage"(6 ECTS).

Les étudiants de la Majeure "Processus Stochastiques" ont la possibilité de remplacer le cours "Nuages Poissoniens, Processus de Levy et Excursions" par le cours "Statistiuques et Apprentissage" ainsi que les étudiants de la Majeure "Probabilités Appliquées" ont la possibilité de remplacer le cours "Statistiques et Apprentissage" par le cours "Nuages Poissoniens, Processus de Levy, Excursions".

Les étudiants de la Majeure "*Probabilités et Equations aux Dérivées Partielles*" suivent 15 ECTS de cours

- Equations aux Dérivées Partielles linéaires, elliptiques et d'évolution (15 ECTS).

Les étudiants qui hésitent dans le choix de leur Majeure ne sont pas obligés de la choisir des le début de l'année universitaire. L'emploi du temps est organisé de telle manière que les étudiants soient en mesure d'assister aux cours de deux Majeures ("Processus Stochastiques " et "Probabilités Appliquées" ou bien "Processus Stochastiques et "Probabilités et EDP") pour arrêter leur choix définitif au bout de quelques semaines de cours.

La date limite pour choisir la Majeure est le 12 Novembre 2025.

Un groupe de travail du Laboratoire de Probabilités, Statistiques et Modélisation est ouvert aux étudiants de ce Master : ils y sont souvent invités au 1er semestre vendredi matin pour être associés à la vie du laboratoire.

Deuxième semestre (30 ECTS) (Février-Juin). Les étudiants ont le choix parmi les cours spécialisés :

- "Probabilités, Géométrie et Dynamique"(6ECTS)
- "Probabilités et Physique"(6ECTS)
- "Probabilités, Méthodes Numériques, Algorithmes "(6ECTS)
- "Processus Stochastiques et Statistiques II"(6ECTS)
- "Géométrie et Graphes Aléatoires"(6ECTS)
- "Probabilités, Neurosciences et Biologie"(6ECTS)
- "Probabilités et Analyse"(6ECTS)

Ces cours présentent plusieurs domaines à la pointe de la recherche en Probabilités Théoriques et Appliquées. Le contenu de chacun des cours de cette année est décrit dans la brochure.

Les cours du second semestre conduisent les étudiants à une première confrontation avec la recherche sous la forme d'un mémoire ou d'un stage. **Le mémoire** consiste en général en la lecture approfondie d'un ou plusieurs articles de recherches récents, sous la direction d'un membre du Laboratoire de Probabilités, Statistiques et Modélisation ou d'un enseignant de la spécialité. Il doit être redigé en Latex et soutenu devant un jury.

Le mémoire peut-être remplacé par un rapport de stage. **Le stage** s'effectue dans un organisme de recherche ou un bureau d'études, sous la direction conjointe d'un ingénieur de l'organisme d'accueil et d'un enseignant de la spécialité.

Le travail de mémoire ou de stage s'appuie sur les connaissances obtenus en cours. *Ce travail ne peut pas être entamé par un étudiant qui n'a pas validé les cours de base du premier semestre. Une convention de stage ne peut pas être signée pour les étudiants qui n'ont pas validé le 1er semestre.*

La travail de mémoire ou de stage est accredité de **12ECTS**, les étudiants doivent le compléter par la validation de **TROIS** cours optionnels au choix pour valider 30 ECTS de second semestre.

Le travail de stage industriel en entreprise de longue durée (plus de 4 mois) avec obligation de présence peut exceptionnellement être accredité de 18ECTS sur demande.

RESPONSABLES

Responsable pédagogique : Madame Irina KOURKOVA,
professeur du laboratoire de Probabilités, Statistiques et Modélisation
de Sorbonne Université

Responsable administratif : Monsieur Yann Poncin
Couloir 14-15, 2ème étage, bureau 208
4, place Jussieu
Sorbonne Université
75005 Paris
E-mail : yann.poncin@sorbonne-universite.fr
Tel : 01 44 27 53 20

COMMENT POSTULER ?

Suivre les indications sur le lien universitaire ci-dessous du 27 Mars au 12 Juin 2025 : https://sciences.sorbonne-universite.fr/formation/candidatures-et-inscriptions/master

Il est indispensable de remplir soigneusement et de joindre au dossier du candidat 2025–2026

LE DOSSIER OBLIGATORE COMPLEMENTAIRE

qui se trouve le site de la spécialité :

https://www.lpsm.paris/formation/masters/m2-probabilites-et-modeles-aleatoires/

Sans le dossier complémentaire proprement rempli, le dossier d'un candidat en M2 "Probabilités et Modèles Aléatoires" sera incomplet et ne pourra pas être considéré par la commission d'admission.

CALENDRIER PREVISIONNEL 2025–2026.

- Inscription administrative sur le site de la scolarité de Sorbonne Université Avril – Juin 2026.
- Le premier semestre débute le lundi 1 septembre et se termine en Janvier.
- Les examens des cours du premier semestre "Modèles Markoveines sur des espaces discrets", "Processus de Markov et Applications" auront lieu au mois de NOVEMBRE, les examens pour les autres cours du premier semestre auront lieu lors de la deuxième moitié du mois de JANVIER.
- Deux réunions d'information sur les cours du second semestre auront lieu à la fin du mois de Décemebre et en Janvier.
- Le deuxième semestre commencera à la fin du Janvier et se terminera en Mai. Une pause de deux semaines est prévue pendant les vacances de Noel et les vacances de Pacques de la zone C.
- Les examens des cours du second semestre auront lieu lors de la première moitié du mois de Juin.
- *Les examens de rattrapage pour les cours du premier semestre auront lieu au mois de mars* (pour permettre aux étudiants de partir en stage en avril).
- Pour les étudiants désirant valider le Master en Juillet, le mémoire ou le stage doit être soutenu au plus tard le 25 Juin 2026.
- Pour les étudiants désirant valider le Master en Octobre, le mémoire ou le stage doit être soutenu au plus tard le 30 Septembre 2026.
- Pour les étudiants qui se trouvent en stage *industriel* dans un organisme extérieur à la date du 30 septembre (et uniquement pour eux!), il est possible de prolonger l'année universitaire jusqu'au décembre 2026 par dérogation.

COURS

Cours préliminiare :

I. KOURKOVA : *Rappels de probabilités*

A. GODICHON-BAGGIONI : *Rappels de statistiques mathématiques*

Cours fondamentaux du premier semestre pour toutes les majeures :

N. FOURNIER : *Calcul Stochastique et Processus de Diffusion* (9 E.C.T.S)

Th. DUQUESNE : *Modèles Markoviens Discrets* (6 E.C.T.S)

Premier semestre, la majeure "Processus Stochastiques" :

Th. DUQUESNE : *Processus de Markov* (3 E.C.T.S)

Th. LEVY : *Convergence de Mesures, Grandes Déviations, Percolation* (6 E.C.T.S)

Th. DUQUESNE : *Nuages Poissoniens, Processus de Levy, Excursions* (6 E.C.T.S)

Premier semestre, la majeure "Probabilités Appliquées" :

G. PAGES, V. LEMAIRE : *Probabilités Numériques, Méthodes de Monte Carlo* (9 E.C.T.S)

C. MATIAS : *Statistique et Apprentissage* (6 E.C.T.S)

Premier semestre, la majeure "Probabilités et Equations aux Dérivées Partielles" :

F. BETHUEL : *EDP linéaires* (5 ECTS)

H.-M. NGUYEN : *EDP ellipriques* (5 ECTS)

V. BARNICA : *EDP d'évolution* (5 ECTS)

Cours spécialisés du deuxième semestre

(I) Probabilités, Géométrie et Dynamique (6 E.C.T.S)

B. FERNANDEZ : La dynamique du modèle de Kuramoto

R. DUJARDIN : Introduction à la théorie ergodique

A. ERSCHLER : Invariants asymptotiques et marches aléatoires sur les graphes et sur les groupes

(II) Probabilités et Physique (6 E.C.T.S)

C. BOUTILLIER, T. LUPU : Mécanique Statistique Critique en dimension 2 et invariance conforme

G. BARRAQUAND : Integrable Probability and the Kardar-Parisi-Zhang universality class *cours du master MATH PSL, enseigné à l'ENS en anglais*

P. LAMMERS : Modèle d'Ising

(III) Probabilités, Méthodes Numériques et Algorithmes (6 E.C.T.S)

B. JOURDAIN : Transport optimal (martingale)

A. RIERA : Géométrie plainaire discrète aléatoire

(IV) Processus Stochastiques et Statistiques II (6 E.C.T.S)

I. CASTILLO : Bayésien non-paramétrique et applications

O. WINTENBERGER : Théorie et Analyse des Valeurs Extrêmes

R. LACHIEZE-REY : Determinantal processes, random matrices and hyperuniformity *cours du master MATH PSL enseigné à l'ENS en anglais*

(V) Géométrie et Graphes Aléatoires (6 E.C.T.S)

B. BLASZCZYSZYN : Modèles Géométriques Aléatoires

N. BROUTIN : Limites d'échelles de graphes aléatoires

J.-F. DELMAS : Les grands réseaux aléatoires denses (les graphons)

(VI) Probabilités, Biologie et Neurosciences (6 E.C.T.S)

M. THIEULLEN : Modèles probabilistes pour les neurosciences

G. NUEL : Propagation d'évidence dans les réseaux bayésiens

Q. BERGER : Systèmes désordonnés et polymères dirigés

(VII) Probabilités et Analyse(6 E.C.T.S)

L. ZAMBOTTI : Rough Paths et applications aux equations différentielles stochastiques

M. TOMASEVIC : Processus de type de McKean-Vlasov et EDP paraboliques

A. BEN-HAMOU : Inégalités de Concentration

Rappels de Probabilités

I. Kourkova

1er semestre, 2 semaines en septembre, 24hh.

Ce cours préliminaire est destiné à faire le point sur des notions fondamentales de Probabilités abordées en M1 et utilisées systématiquement par la suite dans les cours du M2. Parmi ces notions on peut citer :

– éléments de la théorie de mesure et intégration

– le conditionnement

– les différentes notions de convergence

– les martingales à temps discret.

Le cours sera complété par des séances d'exercices et une bibliographie pouvant servir de référence tout au long de l'année de M2.

Calcul Stochastique et Processus de Diffusions

N. Fournier

1er semestre, (octobre – début janvier), 4h par semaine.

Dans ce cours nous allons introduire les techniques de bases du calcul stochastique :

1) le mouvement brownien, la continuité de ses trajectoires, la propriété de Markov (forte)

2) l'intégration stochastique par rapport à une martingale de carré intégrable, la formule d'Ito, le théorème de Girsanov

3) les équations différentielles stochastiques (EDS) et leurs solutions faibles ou fortes (dites diffusions), les liens avec les équations aux dérivées partielles

4) la formule d'Ito-Tanaka, le temps local du mouvement brownien, les EDS réfléchies

5) EDS à coefficients non-lipschitziens, processus de Bessel

Références bibliographiques

Ikeda, N. et Watanabe, S. : *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes ; 2e édition.* North Holland, 1988.

Le Gall, J.-F. : *Mouvement Brownien, Martingales et Calcul Stochastique.* Springer, Collection: Mathe'matiques et Applications, Vol. 71 2013, VIII.

Karatzas, I. et Shreve, S. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus ; 2e édition corrigée.* Springer, 1994.

Mörters, P. et Peres, Y. : *Brownian Motion.* Cambridge University Press, 2010.

Revuz, D. et Yor, M. : *Continuous Martingales and Brownian Motion, 3e édition.* Springer, 1999.

Rogers, L.C.G. et Williams, D. : *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. II, Itô Calculus.* Wiley, 1987.

Processus de Markov et Applications

Th. Duquesne

1er semestre, 1ère – 8ème semaines (septembre – debut novembre), 6h par semaine.

Chaînes de Markov sur un espace d'états dénombrable : classification, mesures invariantes, comportement limite, théorèmes ergodiques. On considèrera des chaînes de Markov apparaissant en biologie (modèles de Wright-Fisher, de Moran), en dynamique des population (chaîne de naissance et de mort, modèle de Galton-Watson) et en mécanique statistique. Processus de Markov de saut pur (Chaînes de Markov sur un espace dénombrable en temps continu.), leur matrice d'intensité, les équations de Kolomogrov, le phénomène d'explosion, le comportement limite, la réversibilité. On considèrera des applications en biologie et des modèles d réseaux stochastiques.

Processus de Markov sur un espace mesurable général, familles de Markov Félleriennes, propriété de Markov forte. Le semi-groupe, le générateur et la résolvante, divers exemples de calculs dont le générateur du mouvement Brownien et autres. Le théorème affirmant que le générateur détermine le sémi-groupe à travers la résolvante. Calcul de la mesure invariante et de lois de fonctionnelles d'un processus de Markov à partir de son générateur. Formule de Feynman-Kac. Problème de martingales. Solutions des équations différentielles stochastiques en tant que processus de Markov. Leurs générateurs. Leurs fonctionnelles "arrêtées". Liens avec les équations aux dérivées partielles elliptiques avec de différentes conditions au bord.

Convergence de Mesures, Grandes Déviations, Percolation

Th. Levy

1er semestre, 3ème – 14ème semaines (octobre – decembre), 2h par semaine pendant 12 semaines.

Objectifs de l'UE : Ce cours consiste en trois chapitres largement indépendants dont le point commun est d'explorer des interactions entre la théorie des probabilités et la topologie ou la géométrie.

1. Convergence des processus. Le but de ce chapitre est de est de démontrer un théorème de Donsker qui affirme qu'une grande classe de marches aléatoires, convenablement renormalisées, converge vers le mouvement brownien. Pour ce faire, nous étudierons de manière assez générale les mesures boréliennes de probabilités sur les espaces métriques, et la convergence faible de suites de telles mesures.

2. Grandes déviations. Notre objectif sera de comprendre ce qu'est un principe de grandes déviations, d'en étudier quelques propriétés générales, et deux exemples génériques fondamentaux que sont le théorème de Sanov et le théorème de Cramér.

3. Percolation. Cette troisième partie sera consacrée à une introduction au modèle de la percolation par arêtes, et à son étude sur le réseau cubique. Notre objectif sera de démontrer que ce modèle présente une transition de phase et de démontrer qu'en dimension 2, cette transition de phase a lieu pour la valeur 1/2 du paramètre.

Prérequis : Une connaissance de la théorie de la mesure et de l'intégration, et des bases de la théorie des probabilités ; un contact avec la topologie des espaces métriques, et avec de l'analyse fonctionnelle.

Thèmes abordés : Convergence des processus : Espaces polonais, Espace des mesures sur un espace polonais, Tension, Théorème de Prokhorov, Théorème de Donsker, Convergence fonctionnelle des processus continus, critère de Kolmogorov. Grandes déviations : Entropie relative de deux mesures, Théorème de Sanov, Transformation de Legendre, Théorème de Cramér. Percolation : Notion de transition de phase, Ergodicité, Inégalité FKG, Phases sous- et sur-critique, Théorème de Kesten. ***

Nuages Poissoniens, Processus de Levy, Excursions.

Th. Duquesne

1er semestre, 10ème – 15ème semaines (fin novembre – début janvier), 6h par semaine sur 4 semaines, ou 4h par semaine sur 6 semaines.

Objectifs de l'UE : ce cours est un approfondissement du cours "Processus de Markov et Applications". On y étudie les processus de Lévy ainsi que certains processus de branchement. On introduira les mesures ponctuelles de Poisson et on exposera la théorie des excursions avec des applications aux processus de Lévy.

Prérequis : il est fortement recommandé d'avoir suivi le cours "Processus de Markov et Applications" et le cours "Convergence de Processus, Grandes déviations, Pércolation".

Thèmes abordés :

- Retour sur les processus de Feller.
- Mesures ponctuelles de Poisson.
- Processus de Lévy.
- Processus de branchement à espace d'états continu.
- Théorie des excursions.

Probabilités Numériques, Méthodes de Monte-Carlo

G. Pages, V. Lemaire

1er semestre, 3ème – 15ème semaines (octobre – début janvier), 2h de cours, 3h d'illustrations numŕeiques en C++11 par semaine.

Objectifs du cours :

Le but de ce cours est de présenter les méthodes de Monte-Carlo et de Quasi-Monte-Carlo d'usage courant . De nombreux exemples issus de problèmes de calcul de prix et de couverture d'options illustrent les développements. Une mise-en-oeuvre informatique des techniques abordés sera effectuée lors des séances de TD. Chaque étudiant devra réaliser, en binôme, un projet informatique (en langage C) implémentant soit des calculs de prix et de couvertures d'options soit des simulations d'autres modèles. Il remettra un rapport décrivant les méthodes utilisées et commentant les résultats obtenus. Ce cours aborde les thèmes suivants :

1.Introduction à la simulation : génération de variables aléatoires suivant les lois usuelles.

2.Méthode de Monte-Carlo : calcul d'espérance par simulation.

3.Méthodes de réduction de variance : variables de contrôle, échantillonnage préférentiel, variables antithétiques, stratification, conditionnement.

4.Quasi-Monte-Carlo : techniques de suites à discrépances faibles.

5.Méthodes de gradient stochastique et de Bootstrap.

6.Discrétisation en temps des équations différentielles stochastiques (schéma d'Euler, de Milshtein) : application au pricing d'options européennes.

7.Amélioration de la méthode dans le cas d'options path-dependent : ponts browniens,...

8.Calcul des couvertures et sensibilités par méthode de Monte-Carlo

9.Introductionà la simulation des processus à sauts.

En parallèle de ce cours, 8 séances de 3 heures seront consacées à la mise en oeuvre de ces algorithmes en C++11, en illustrant différents concepts de programmation: la programmation orientée objet, la programmation générique et la programmation fonctionnelle.

L'évaluation du cours se fait par un examen et le rendu d'un projet informatique (au second semestre): chaque étudiant devra réaliser, en binôme, un projet informatique (en langage C/C++) implémentant soit des calculs de prix et de couvertures d'options soit des simulations de modèles financiers. Il remettra un rapport décrivant les méthodes utilisées et commentant les résultats obtenus.

Modèles Markoviens sur des espaces discrets

Th. Duquense

1er semestre, 1ère – 4ème semaines (septembre – debut novembre), 6h par semaine.

Chaînes de Markov sur un espace d'états dénombrable : classification, mesures invariantes, comportement limite, théorèmes ergodiques. On considèrera des chaînes de Markov apparaissant en biologie (modèles de Wright-Fisher, de Moran), en dynamique des population (chaîne de naissance et de mort, modèle de Galton-Watson) et en mécanique statistique. Processus de Markov de saut pur (Chaînes de Markov sur un espace dénombrable en temps continu), leur matrice d'intensité, les équations de Kolomogrov, le phénomène d'explosion, le comportement limite, la réversibilité. On considèrera des applications en biologie et des modèles d réseaux stochastiques.

Statistique et Apprentissage

C. Matias

1er semestre, 10ème – 15ème semaines (fin novembre – début janvier), 6h par semaine sur 5 semaines

Objectifs : Ce cours vise à donner aux étudiants les bases fondamentales du raisonnement et de la modélisation statistique, tout en présentant une ouverture vers des thématiques de recherche contemporaines. L'accent sera particulièrement mis sur l'utilisation pratique des nouveaux objets rencontrés.

Prérrequis : Une bonne connaissance du calcul des probabilités et de l'algèbre linéaire.

Thèmes abordés :

- Introduction à l'apprentissage statistique et à la classification supervisée.
- Minimisation du risque empirique, théorème de Vapnik-Chervonenkis.
- Règles de décision non paramétriques (méthode des k plus proches voisins et arbres de décision).
- Quantification et classification non supervisée.
- Modèle linéaire : estimation, intervalles de confiance et tests.
-Regression ridge et lasso, Spectral clustering en classification non supervisée ; Arbres de décision.

EDP Linéaires, EDP elliptiques, EDP d'évolution

F. Bethuel, H.-M. Nguyen, V. Barnica

Ces cours sont organisés en commun avec le parcours M2 "Mathématiques dela Modélisation" de Sorbonne Université, pour les résumés voir
https://www.ljll.fr/MathModel/

Probabilités, Géométrie et Dynamique

2ème semestre, Février-Mai.

PARTIE I : **B. Fernandez,** La dynamique du modèle de Kuramoto

"The Kuramoto model is the archetype of mean field systems of coupled oscillators that interact through attractive pairwise interactions. Its dynamics is a paradigm of the transition to synchronisation in collective systems. This course aims to present the main mathematical results about the dynamics of this model and its phenomenology, both in the case of (nearly) identical oscillators and, more interestingly, when the oscillators frequencies are randomly selected with arbitrary distribution (disordered case). In particular, focus will be made on the continuous limit of the model in the disordered case, and on the delicate proof of the related asymptotic stability of stationary solutions; a phenomenon that can be regarded as a simple analogue of the well-known Landau damping in Plasma Physics."

PARTIE II : **R. Dujardin,** Introduction à la théorie ergodique

Cette partie du cours porte sur la théorie ergodique des systèmes dynamiques déterministes et aléatoires, c'est-à-dire l"etude de ces systèmes dynamiques par la théorie de la mesure et des probabilités. Une question fondamentale dans ce contexte est la description du comportement asymptotique des orbites typiques au sens de la mesure.

On introduira dans un premier temps les concepts, exemples et résultats fondamentaux de la théorie déterministe:

- le vocabulaire des systèmes dynamiques, et les exemples de base (dynamique sur le cercle, sur les tores, systèmes symboliques) - les notions d'érgodicitÃ©, de mélange, les théorèmes ergodiques classiques.

La deuxième partie du cours portera sur les systèmes dynamiques aléatoires. Les notions suivantes devraient être abordées (liste non exhaustive):

- mesures stationnaires vs mesures invariantes, théorèmes ergodiques aléatoires - cocycles et théorème d'Oseledets - produits aléatoires de matrices - principe d'invariance

PARTIE III : **A. Erschler :** Invariants asymptotiques et marches aléatoires sur les graphes et sur les groupes

Ce cours est une introduction aux marches aléatoires sur des graphes. Nous étudierons divers invariants de groupes et marches aléatoires sur des groupes et des graphes, et notre motivation particulière est la géométrie asymptotique des graphes, sont des graphes transitifs infinis. Nous allons étudier la croissance: des groupes à croissance exponentielle; des groupes nilpotents et croissance polynomiale; des groupes à croissance intermédiaire, la moyennabilité est la notion de l'entropie des groupes. Le comportement asymptotique de marches aléatoires sur des groupes polycyliques, des groupes résolubles, des groupes élémentairement moyennables; des inégalités isopérimétriques et des probabilités de transition. Estimation Gaussiennes de Carne-Varopoulos ; les applications. Le bord de Poisson; la frontière de Martin et d'autres fonctions harmoniques non-bornées. Nous étudierons des résultats fondamentaux dus à Doob, Furstenberg, Cartier, Kaimanovich, Vershik et Derriennic, et à la fin du cours, nous prévoyons de discuter quelques résultats très récents dans ce domaine. Ce cours va donner aussi une introduction aux groupes de type fini.

Aucun prérequis spécifique en probabilité ou théorie des groupes n'est requis.

Probabilités et Physique

Partie I : **C. Boutiller, T. Lupu:** Mécanique statistique critique en dimension 2 et invariance conforme

Les physiciens théoriciens, grâce à la théorie conforme des champs, ont pu prédire et classifier le comportement de modèles de mécanique statistique en dimension 2 au point critique, sous l'hypothèse que ceux-ci avaient une limite d'échelle invariante conforme.

Cependant, il a fallu attendre le début de ce siècle pour obtenir la preuve mathématique que ces modèles discrets avaient effectivement ces propriétés.

Dans ce cours nous nous proposons de d'étudier deux exemples de modèles pour lesquels cette invariance conforme a été établie :

- la percolation par site sur le réseau hexagonal ;
- les pavages par dominos.

Dans une deuxième partie du cours, nous donnerons une brève introduction aux processus SLE, introduits par Schramm à la fin des années 1990. Ces processus stochastiques invariants conformes jouent un rôle prépondérant dans la compréhension mathématique des limites continues de ces phénomènes critiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Vincent Beffara and Hugo Duminil-Copin. Planar percolation with a glimpse of Schramm-Loewner evolution. *Probab. Surv.*, 10 :1–50, 2013.

2. Richard Kenyon. Conformal invariance of domino tiling. *Ann. Probab.* , 28(2) :759–795, 2000.

3. Oded Schramm. Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems. In *Proceedings of the international congress of mathe- maticians (ICM), Madrid, Spain, August 22–30, 2006. Volume I : Plenary lectures and ceremonies*, pages 51–543. Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2007.

4. Stanislav Smirnov. Critical percolation in the plane : Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, 333(3) :239–244, 2001.

5. Wendelin Werner. *Percolation et modèle d'Ising*, volume 16. Paris : Société Mathématique de France, 2009.

Partie II : **G. Barraquand :** Probabilités Intégrables et la classe KPZ

Cours du Master MATH PSL. Le cours a lieu en Anglais à l'ENS.
Voir :
https://www.ceremade.dauphine.fr/ M2MATH/

Integrable probability is a relatively new subfield of probability that concerns the study of exactly solvable probabilistic models and their underlying algebraic structures. Most of these so-called integrable models come from statistical physics. They serve as toy models to discover the asymptotic behavior common to large classes of models, called universality classes. The methods used in integrable probability often come from other areas of mathematics (such as representation theory or algebraic combinatorics) and from theoretical physics. In the last twenty years, these methods have been particularly fruitful for studying the Kardar-Parisi-Zhang universality class (named after the three physicists who pioneered the domain in the 1980s). This class gathers interface growth models describing a wide variety of physical phenomena, whose asymptotic behavior is surprisingly related to the theory of random matrices. This course will focus on a central tool in the field: Schur and Macdonald processes. This will allow us to study in a unified way some of the most emblematic integrable models, and ultimately arrive at the the exact calculation of the law of a solution of the Kardar-Parisi-Zhang equation. Along the way, we will take a few detours through various applications or related concepts: random matrices, Robinson-Schensted-Knuth correspondence, interacting particle systems, Yang-Baxter equation and the six-vertex model.

The plan of the course is (subject to change)

- Introduction to the KPZ equation and universality class
- Schur measures and processes
- Determinantal point processes
- The stochastic six-vertex model and Hall-Littlewood polynomials KPZ equation
- Random walks in random environment

Partie III : **P. Lammers :** Modèle d'Ising

Ce cours vise à introduire les techniques fondamentales pour l'analyse des modèles sur réseau, en mettant l'accent sur l'expression des quantités clés de ces modèles en termes d'objets géométriques aléatoires. Nous étudierons également ces objets pour comprendre certains résultats récemment obtenus.

Prérequis : Ce cours nécessite une connaissance de la théorie de la mesure et de l'intégration, ainsi que des bases en théorie des probabilités. Il est recommandé d'avoir des notions de topologie des espaces métriques et d'analyse fonctionnelle.

Thèmes abordés :

- Transitions de phase
- Modèle Ising
- Modèle de percolation
- Couplage de Fortuin–Kasteleyn
- Courants aléatoires
- Marches aléatoires
- Argument de Burton–Keane

Probabilités, Méthodes Numériques, Algorithmes

PARTIE I : **B. Jourdain,** Transport optimal (martingale)

Le problème de transport optimal entre deux mesures de probabilité μ et ν sur $\mathbf{R}^d$ a été introduit par Monge [2] en 1781 dans le cas où ces mesures représentent respectivement la distribution de la terre à déblayer et celle de la terre à remblayer :

$$\inf_{T:T\#\mu=\nu} \int_{\mathbf{R}^d} c(x, T(x))\mu(dx),$$

où $c : \mathbf{R}^d \times R^d \to R$ est une fonction de coût mesurable et $T\#\mu$ désigne l'image de μ par l'application de transport $T : R^d \to R^d$. L'existence de T telle que $T\#\mu = \nu$ n'étant pas garantie pour tout choix (μ, ν) (cas où μ est une masse de Dirac mais pas ν), Kantorovitch [1] a introduit durant la seconde guerre mondiale une relaxation très féconde de ce problème en considérant

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathbf{R}^d\times R^d} c(x, y)\pi(dx, dy)$$

où $\Pi(\mu, \nu) = \{\pi \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d \times R^d) : \pi(dx, R^d) = \mu(dx) \text{ et } \pi(R^d, dy) = \nu(dy)\}$ désigne l'ensemble des couplages entre μ et ν. Il existe en particulier un couplage optimal $\pi_\star$ dès lors que c est semi-continue inférieurement et minorée. Cette relaxation a permis le développement d'une théorie très riche avec de nombreuses applications notamment en statistique, en finance, en vision par ordinateur ou en intelligence artificielle. En finance robuste, le problème de transport optimal martingale où seuls les couplages martingales π sont considérés dans l'infimum permet de calculer des bornes de prix robustes pour une option de payoff $c(S_{T_1}, S_{T_2})$ lorsque l'on connaît les lois risque-neutre μ et ν des prix S_{T_1} et S_{T_2} des actifs sous-jacents aux instants T_1 et T_2 au travers des prix de marché d'options vanille. L'existence d'un couplage martingale est équivalent à la domination de μ par ν pour l'ordre convexe d'après le théorème de Strassen.

Dans ce cours, nous étudierons

- la formulation duale du problème de transport optimal et la caractérisation de l'optimalité au travers de la monotonie cyclique,
- la distance de Wasserstein sur l'ensemble des probabilités avec un moment d'ordre $\rho \geq 1$ fini obtenue pour le coût $c(x, y) = |y - x|^\rho$, en portant une attention particulière au cas quadratique $\rho = 2$ (theorème de Brenier) et à la dimension $d = 1$,
- la formulation duale du problème de transport optimal martingale et la caractérisation de l'optimalité au travers de la monotonie cyclique martingale ainsi que la stabilité de ce problème par rapport aux lois marginales μ et ν,
- l'algorithme du Sinkhorn qui assure une convergence géométrique vers la solution du problème de transport optimal avec régularisation entropique.

References

[1] Kantorovitch, L. On the transfer of masses, Dokl. Acad. Nauk. USSR, 37, 7-8, 1942.

[2] Monge, G., Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, Imprimerie royale, 1781.

[3] Rachev, S. T. et Rüschendorf, L., Mass transportation problems. I et II, Springer-Verlag, New York, 1998

[4] Santambrogio, F., Optimal transport for applied mathematicians, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[5] Villani, C., Optimal transport, Springer-Verlag, Berlin, 2009

Partie II : **A. Riera** Géométrie planaire discrète aléatoire

Dans ce cours, nous chercherons à répondre à deux questions fondamentales :

Qu'est-ce qu'une géométrie planaire discrète aléatoire ? Et comment peut-on étudier ce type d'objet ?

Le terme planaire signifie ici que nous nous intéressons à des géométries pouvant être représentées sur le plan. Ces questions ne sont pas uniquement d'ordre mathématique : elles interviennent également en physique, notamment dans le cadre de la gravité quantique, où elles servent à définir et à analyser des modèles géométriques aléatoires de l'espace-temps.

Nous adopterons cependant une approche essentiellement mathématique. Dans notre cadre, une géométrie planaire discrète aléatoire sera vue comme un collage aléatoire de polygones — des objets que l'on appelle plus précisément des cartes planaires.

La première partie du cours sera consacrée à la définition rigoureuse des cartes planaires et à l'introduction de mesures de probabilité adaptées sur l'ensemble de ces objets. Ces mesures seront de forme produit, analogues à celles utilisées pour les marches aléatoires sur des chemins discrets. Nous introduirons également plusieurs bijections entre cartes plantaires et autres modèles plus simples comme les arbres (à étiquettes).

Dans la seconde partie, nous présenterons une procédure d'exploration permettant d'analyser les cartes planaires aléatoires. De la même manière que le temps permet d'explorer une marche aléatoire, nous explorerons ici la géométrie pas à pas. Cette méthode est appelée peeling process.

Grâce à ce processus, il sera possible de traduire certains problèmes géométriques liés aux cartes planaires en problèmes de marches aléatoires ou arbres, beaucoup plus simples à étudier. De telles techniques apparaissent dans divers domaines des probabilités.

Enfin, dans la troisième partie, nous aborderons plusieurs applications des outils développés précédemment.

Processus Stochastiques et Statistiques II

PARTIE I : **I. Castillo,** Bayésien non paramétrique et applications

L'approche bayésienne en statistiques consiste à munir l'espace des paramètres du modèle statistique d'une loi de probabilité, la loi a priori. Chaque loi du modèle est vue comme la loi des données conditionnellement au paramètre. L'estimateur bayésien est alors la loi conditionnelle du paramètre sachant les données. C'est une mesure de probabilité, aléatoire à travers sa dépendance en les données. L'utilisation pratique d'algorithmes basés sur des lois a posteriori a connu un essor très important depuis la fin des années 1990, avec de nombreuses applications en statistique et apprentissage.

Dans ce cours, nous introduisons tout d'abord des outils généraux qui permettent d'étudier du point de vue mathématique la convergence de lois a posteriori, d'après des travaux de Ghosal, Ghosh et van der Vaart (2000-2010). Ensuite, nous considérons deux types d'applications. D'une part, nous verrons comment la théorie précédente s'applique à un cadre d'estimation de fonction de régression et à des modèles dits de grande dimension. D'autre part, nous verrons des applications récentes à des lois sur des objets "profonds", et montrerons en quoi ceux-ci permettent une adaptation automatique à des structures cachées de petite dimension. I) Théorie générale de convergence de lois bayésiennes a posteriori: l'approche de Ghosal, Ghosh, van der Vaart

II) Applications 1 : estimation de fonctions de régression par processus gaussiens, modèles de grande dimension

III) Applications 2 : deep Bayes. Réseaux de neurones profonds et lois deep-ReLU, processus Gaussiens profonds

Une bibliographie du cours et les informations pratiques se trouvent sur la page web d'Ismaël Castillo.

PARTIE II : **O. Wintenberger** Théorie et Analyse des Valeurs Extrêmes

Objectifs de l'UE : Ce cours est structuré en deux parties complémentaires. La première partie aborde la théorie des probabilités appliquée à l'étude des valeurs extrêmes. La seconde partie se concentre sur l'analyse statistique des valeurs extrêmes et les techniques d'extrapolation. Une attention particulière sera portée à l'analyse des risques pour des données multivariées.

Validation : L'évaluation du cours repose sur deux éléments :
- Un projet à réaliser en Python ou R.
- Un examen écrit sur table.

Prérequis :
- Connaissances solides en probabilités et statistique.
- Expérience en programmation (Python ou R).

Thèmes abordés :
- Lois max-stables (et lois alpha-stables).
- Domaines d'attraction.
- Variations régulières.

(• Processus ponctuels des excès. • Processus de Poisson.)

• Loi des extrêmes généralisée.
• Loi de Pareto généralisée.
• Estimateur de Hill.
• Méthode d'extrapolation de Weissman.
(• Standardisation des marges. • Apprentissage automatique de seuils.)
• Extremogramme.

PARTIE III : **R. Lachièze-Rey** Determinantal processes, random matrices and hyperuniformity

Cours du Master MATH PSL. Le cours a lieu en Anglais à l'ENS.
Voir :
https://www.ceremade.dauphine.fr/ M2MATH/

The purpose of this course is to study random configurations of points (or particles) in continuous space $\mathbf{R}^d$, called **point processes**. We begin by studying finite systems, starting with a set of N independent and identically distributed points in a compact set of R^d, and their natural generalization to an infinite number of points, the *Poisson process*, which serve as a "reference law" (Figure below).

The N eigenvalues of $N \times N$ real or complex **random matrices** provide models of highly dependent points in $\mathbf{R}$ or C, asymptotically related to some **determinantal point processes**, particularly the "sine process" (translation invariant on R) or the "infinite" Ginibre process (translation invariant on C). Determinantal processes form a very rich class of models in any dimension, but these two experience a variance cancellation phenomenon that gives them particular macroscopic properties. This phenomenon is called **hyperuniformity**.

Depending on time, we may study other systems with this particular property, such as the zeros of the planar **Gaussian analytic function**, related to the study of zeros of random polynomials (this would require some complex analysis), or certain **continuous particle systems**, or study what hyperuniformity implies macroscopically (optimal transport, rigidity, etc...).

Keywords: Point processes, random matrices, determinantal processes, hyperuniformity, zeros of random polynomials, Particle Systems, Gibbs measures, Optimal Transport.

References

[BKPV] Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes, John Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres, Bálint Virág.

Géométrie et Graphes Aléatoires

PARTIE I : **B.Blaszczyszyn** Modèles géométriques aléatoires

Le cours fournit un accès rapide à certains modèles populaires dans la théorie de graphes aléatoires, processus ponctuels et ensembles aléatoires. On rencontre ces modèles dans l'analyse mathématique de réseaux (sociaux, de communication, biologique, etc). Le cours est composé des quinze lecons suivantes:

- Percolation sur la grille carrée,
- Arbre de Galton-Watson,
- Graphe d'Erdős-Rényi — l'émergence de la composante géante,
- Modèle de configuration — graphe avec la distribution des dégrées donnée,
- Graphes aléatoires unimodulaires — noeud typique du graphe,
- Graphe d'Erdős-Rényi — l'émergence de la connectivité,
- Processus ponctuel de Poisson,
- Probabilités de Palm — conditionnement par un point,
- Processus à noyau dur (hard core),
- Processus ponctuels stationnaires — principe de transport de masse,
- Mosaique stationnaire de Voronoi — formules inverse et d'échange de Neveu,
- Ergodicité et les point-shifts invariants,
- Ensembles fermés aléatoires,
- Modèle Booléen et les processus de couverture,
- Connexité des ensembles aléatoires et la percolation continue.

L'attention sera portée sur les relations entre les différents modèles et sur les concepts fondamentaux. Par exemple, le principe de transport de masse relie les graphes unimodulaires et les processus ponctuels stationnaire en permettant de définir l'élément typique dans des grandes structures aléatoires, régulières.

PARTIE II : **N. Broutin** Limites d'échelles de graphes aléatoires

A quoi ressemble un grand arbre choisi au hasard ? Et un graphe ? Voir par exemple les simulations données sur la page web de Nicolas Broutin.

Peut-on justifier formellement l'impression que donne les simulations, à savoir que les ces structures on l'air d'être fractales ?

L'objet du cours est de tenter de répondre à ces questions et de présenter certaines limites de graphes aléatoires considérés en temps qu'espaces métriques. Il s'agira à la fois (a) d'introduire des objets centraux intimement liés au mouvement brownien, (b) de présenter un ensemble de techniques qui sont basées sur des représentations combinatoires explicites et (c) d'étudier les applications aux graphes aléatoires dans le régime dit critique. En particulier, les relations entre objets discrets et continus seront au centre de nos préoccupations.

Le cours comportera deux parties: dans un premier temps, nous considérerons des arbres aléatoires de type Galton–Watson et leurs limites. Nous parlerons en particulier des différents encodages des arbres, de leur convergences, ainsi que tu point de vue 'objectif' qui consiste à les considérer comme des espaces métriques (mesurés); ca sera l'occasion de parler de la topologie de Gromov-Hausdorff sur les classes d'isométries d'espaces métriques compacts. Cela nous permettra d'introduire l'arbre continu brownien de plusieurs maniÃres (en particulier comme métrique aléatoire sur $[0,1]$, ou encore par découpage de $\mathbf{R}_+$ et reorganisation/recollage des morceaux), et d'étudier certaines de ses propriétés. Nous verrons en particulier qu'il s'agit d'un objet fractal qui est au coeur de la construction de nombreux objets limites de structures combinatoires (de la même manière que le mouvement brownien est central pour les convergences fonctionnelles).

Nous verrons ensuite comment, à partir des techniques d'explorations, il est possible d'obtenir la limites de certains graphes aléatoires dans le régime dit 'critique' qui précÃde l'émergence d'une composante connexe macroscopique. En particulier, nous construirons les objets limites à partir de l'arbre brownien continu. Là encore, nous nous efforcerons de développer plusieurs points de vue complémentaires. Nous parlerons aussi de processus de coalescence (en particulier le coalescent multiplicatif) que l'on peut définir comme le processus qui régit la dynamique des tailles des compososantes connexes d'un graphe aléatoire lorsque l'on ajoute des arêtes à la bonne vitesse.

Nous aborderons ensuite certains ces thèmes choisis parmi les suivants: universalité de l'arbre continu brownien, universalité des limites de graphes aléatoires, processus de fragmentation sur l'arbre continu brownien, généalogie de la fragmentation de l'arbre continu et arbre des coupes, constructions explicites des coalescents additifs et multiplicatifs standards.

PARTIE III : **J.-F. Delmas :**Les Grands réseaux aléatoires denses (Graphons)

Le cours s'inspire du livre de Lovasz (2012) "Large networks and graph limits"

Il s'agit de présenter la théorie des grands graphes denses (graphe à n sommets et le degré de chaque sommet de l'ordre de n) qui a été développée depuis les années 2000. Cette théorie élégante décrit ces graphes denses par une fonction $(x, y) \to W(x, y)$ qui donne la probabilité que les "sommets" x et y soit connectés, où x et y vivent dans le continuum $[0, 1]$. Cela inclus en particulier les modèles SBM (stochastic bloc model).

Ce cours est à la frontière de l'analyse, de la combinatoire et des probabilités.

Plan du cours:

(1) Graphe, densité d'homomorphisme et noyaux

(2) Distance de coupe et Compacité de l'espace des graphons

(3) Échantillonnage et Lemmes de comptage

(4) Caractérisation de la convergence des graphons

(5) Applications (par exemple: modèle d'attachement préférentiel, peut on réordonner les sommets de sorte que le degré soit croissant, limite de graphe aléatoire avec séquence des degrés donnée, détection de communauté, ...)

Probabilités, Biologie et Neurosciences

PARTIE I : **M. Thieullen,** Modèles Probabilistes pour les Neurosciences

Les modèles stochastiques sont indispensables pour décrire la variabilité des phénomènes observés en Neurosciences. Les modèles probabilistes bâtis sur l'observation des phénomènes physiologiques ou sur des perturbations de modèles déterministes antérieurs conduisent à de nombreuses questions car ils ne satisfont pas toujours les hypothèses classiques. Le cours abordera certaines de ces questions: premier temps de passage, formule de Feynman-Kac, systèmes lents-rapides, applications des grandes déviations, comportement stationnaire, approximation diffusion, processus de Markov déterministes par morceaux, modèles champ moyen, propagation du chaos. Le lien avec les modèles basés sur des équations aux dérivées partielles sera souligné.

PARTIE II : **G. Nuel,** Propagation d'évidence dans les réseaux bayésiens

Notion de réseaux bayésien (vu comme une généralisation des mode'les Markovien discrets) - notion d'évidence, marginalisation - notion de junction tree, heuristiques de construction - notion de messages, th'eorèmes fondamentaux - algorithmes de propagation, inward/outward, lois jointes - applications diverses (chaines de Markov conditionnées par ses deux extrémités, chaînes de Markov cachées sous contraintes, arbres Markoviens avec boucles, etc.) - calcul et maximisation de de la vraisemblance en présence de données complètes - maximisation de la vraisemblance en présence de données incomplètes (par exemple par algorithme EM ou par optimisation multi-dimensionnelle directe)

L'ensemble du cours sera illustré par de nombreux exemples, notamment dans le contexte biomédical (diagnostique d'une maladie, prise en charge d'un patient aux urgences, génétique humaine, etc.), pour lesquels les calculs seront implémentés sous le logiciel R (pas de pré-requis car niveau technique de programmation assez faible).

NB: bien que le mot clef bayésien soit dans l'intitulé du cours, celui-ci ne traite absolument pas l'inférence bayésienne.

PARTIE III : **Q. Berger** Systèmes désordonnés et polymères dirigés

Dans une première partie, le cours passera en revue quelques modèles de mécanique statistique et abordera une question centrale dans l'étude des systèmes désordonnés, appelée la pertinence du désordre. Cette question est assez vaste et consiste principalement à déterminer si les propriétés d'un système restent stables sous de petites perturbations (aléatoires).

Le reste du cours développera en détail un exemple : le modèle de polymère dirigé en environnement aléatoire. Ce modèle repose sur une marche aléatoire interagissant avec un environnement aléatoire, et a fait l'objet de nombreuses études (et de progrès importants) au cours des dernières années. En effet, bien que le modèle soit très simple à définir (il s'agit d'une version désordonnée de la marche aléatoire simple), il présente une grande variété de comportements et, en particulier, possède une transition de phase lorsque l'intensité du désordre varie.

Nous décrirons d'abord les caractéristiques importantes de ce modèle, par exemple en montrant la présence d'une transition de phase et en discutant du rôle de la dimension dans la question de la pertinence du désordre. Ensuite, nous passerons à des résultats très récents, sur plusieurs fronts (en fonction du temps restant) :

- la caractérisation de la transition de phase en dimension $d3$,
- la construction d'une limite d'échelle désordonnée et sa relation avec l'équation de la chaleur stochastique,
- le cas de la dimension critique $d = 2$.

Probabilités et Analyse

PARTIE I : **L. Zambotti** Rough Paths et applications aux équations différentielles stochastiques

Le but de ce cours est de donner une présentation synthétique mais complète de l'approche *rugueuse* à l'analyse stochastique, qui a été développée depuis 1998 par T. Lyons, M. Gubinelli, A.M. Davie et d'autres. Cette approche est alternative à la méthode basée sur le calcul stochastique classique et permet de donner une réponse (surprenante) à la question de la continuité de l'application dite d'Itô qui associe à la trajectoire d'un mouvement brownien la trajectoire de la solution d'une équation différentielle stochastique. On expliquera à la fin du cours comment ces idées très novatrices ont été appliquées par M. Hairer au cadre beaucoup plus complexe des équations aux dérivées partielles stochastiques avec la théorie des structures de régularité.

PARTIE II : **M. Tomasevic** Processus de type McKean-Vlasov et EDP Paraboliques

textbfObjectifs : Dans ce cours nous étudierons les liens entre les processus (diffusions) non linéaires de type McKean-Vlasov et les EDP paraboliques non-linéaires. L'objectif principal est d'introduire toutes les notions de base pour pouvoir ensuite étudier la *propagation du chaos* d'un système de particules en interaction vers sa limite champ-moyen identifiée comme étant un processus de McKean-Vlasov. Nous verrons comment les techniques d'analyse d'EDP et du calcul stochastique se combinent dans ce contexte. Le cours commencera par traiter des interactions régulières et markoviennes entre particules. On présentera aussi divers modèles venant de la biologie, de la physique, de la finance où les interactions sont singulières et même non markoviennes. Ces modèles posent des problèmes très actuels en recherche et on introduira quelques techniques récentes pour les aborder.

Pré-requis : Cours "Calcul Stochastique" du 1er semestre
Quelques références :
[1] I. Karatzas, and S. E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, second ed., vol. 113 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.
[2] A-S. Sznitman, Topics in propagation of chaos, In: "Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989", volume 1464 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1991, 165–251.
[3] D. Talay and M. Tomasevic, A new McKean–Vlasov stochastic interpretation of the parabolic–parabolic Keller–Segel model: The one-dimensional case, Bernoulli 26 (2020), 1323–1353.
[4] N. Fournier and B. Jourdain, Stochastic particle approximation of the Keller–Segel equation and two-dimensional generalization of Bessel processes, Ann. Appl. Probab. 27 (2017), 2807–2861.

PARTIE III : **A. Ben-Hamou** Inégalités de concentration

En probabilités comme en statistiques, on est souvent amené à étudier les déviations d'une variable aléatoire par rapport à son espérance. Alors que le théorème central limite nous renseigne sur les fluctuations asymptotiques, les inégalités de concentration fournissent des résultats non-asymptotiques (à n fixé). Les inégalités exponentielles classiques, comme l'inégalité de Hoeffding, concernent les sommes de variables indépendantes. Dans ce cours, nous verrons que le phénomène de concentration de la mesure apparait aussi pour des fonctions bien plus complexes que la somme: " une variable qui dépend (de facon lisse) de beaucoup de variables indépendantes (mais pas trop de chacune d'entre elles) est essentiellement constante " (Michel Talagrand).

Parmi les méthodes et résultats abordés dans ce cours, citons par exemple les inégalités de Poincaré et de Sobolev, la méthode entropique, la méthode de transport, le lien entre concentration et isopérimétrie. Nous nous intéresserons aussi au cas de variables dépendantes et verrons notamment comment la méthode de Stein permet d'obtenir des résultats de concentration dans des cadres non-indépendants.

La théorie de la concentration trouve des applications dans de nombreux domaines, et le cours sera illustré par beaucoup d'examples issus de la physique statistique, mais aussi d'autres contextes comme l'apprentissage statistique, les matrices et graphes aléatoires, le mélange de chaines de Markov, la théorie de l'information.