MASTER 2, 1ère session, Markov I.

Sorbonne Université, 12 novembre 2025.
Durée 3 heures ; notes de cours autorisées.

Exercice I

Les questions suivantes sont indépendantes et nécessitent une justification.

I-1) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ qui est définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Montrer, en le justifiant soigneusement, qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ que l'on calculera explicitement tel que l'on ait $\mathbb{P}$-p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} \frac{2^{|X_n|}}{(|X_n|)!}}{\displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} 5^{-|X_n|}} = c.$$

On adopte la convention que $0! = 1$.

I-2) Existe-il des chaînes de Markov irréductibles transientes admettant une probabilité invariante ?

I-3) Existe-il des chaînes de Markov irréductibles transientes admettant une mesure invariante ?

I-4) Existe-il des chaînes de Markov irréductibles transientes n'admettant pas de mesure invariante ?

Exercice II

On fixe un entier $N \geq 2$ et on note $C_N = \{0,1\}^N$. On dit que $s = (s_1, \ldots, s_N) \in C_N$ et $s' = (s'_1, \ldots, s'_N) \in C_N$ sont *voisins* (ce qu'on note $s \sim s'$) s'il existe $1 \leq k \leq N$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\} \setminus \{k\}, \quad s_i = s'_i, \qquad \text{et} \qquad s_k \neq s'_k.$$

Le graphe dont les sommets sont les éléments de C_N et dont les arêtes relient les sommets voisins est appelé *l'hypercube de dimension N*.

II-1) Dessiner C_2, puis C_3.

II-2) Combien un sommet donné de C_N a-t-il de voisins ? On définit la matrice $Q_0 = (p_0(s,s'))_{s,s'\in C_N}$ sur C_N en posant

$$p_0(s,s') = \begin{cases} 1/(2N) & \text{si } s \sim s', \\ 1/2 & \text{si } s = s', \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Est-ce une matrice de transition ?

II-3) Montrer que Q_0 est irréductible et apériodique.

II-4) Pourquoi admet-elle une loi invariante ? Calculer cette loi invariante que l'on note π.

II-5) Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, un espace de probabilité sur lequel est définie une suite de variables $U_n : \Omega \to \{1, \dots, 2N\}$, $n \geq 1$, $\mathscr{F}$-mesurables, indépendantes et de loi uniforme. On fixe une loi de probabilité $\mu \in \mathscr{M}_1(C_N)$ et suppose en plus qu'il existe $X_0, Y_0 : \Omega \to C_N$ indépendantes, $\mathscr{F}$-mesurables telles que X_0 a pour loi μ et Y_0 a pour loi π. On suppose que les v.a. X_0, Y_0 sont indépendantes de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$. On définit de manière récursive suivante deux suites de variables à valeurs dans C_N :

$$X_n = (X_n^1, \dots, X_n^N) \in C_N, \qquad Y_n = (Y_n^1, \dots, Y_n^N) \in C_N, \qquad n \geq 0.$$

On suppose définies $X_0, Y_0, \dots, X_n, Y_n$. Pour tout $1 \leq k \leq N$:

- si $U_{n+1} = 2k - 1$, la k-ième coordonnée de X_{n+1} et de Y_{n+1} sont choisies égales toutes les deux à 1, et les autres coordonnées de X_{n+1} (resp. de Y_{n+1}) sont égales à celles de X_n (resp. de celles de Y_n).

- si $U_{n+1} = 2k$, la k-ième coordonnée de X_{n+1} et de Y_{n+1} sont choisies égales toutes les deux à 0, et les autres coordonnées de X_{n+1} (resp. de Y_{n+1}) sont égales à celles de X_n (resp. à celles de Y_n).

II-5a) Dans cette question seulement, on suppose que $N = 3$, $X_0 = (0, 0, 0)$ et $Y_0 = (0, 1, 0)$. Calculer X_1 et Y_1 si $U_1 = 5$. Même question si $U_1 = 2$.

II-5b) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont des chaînes de Markov de matrice de transition Q_0.

II-5c) On pose $T_N = \inf\{n \geq 1 : \{U_1, \dots, U_n\} = \{1, \dots, 2N\}\}$. Montrer que $\mathbb{P}(T_N < \infty) = 1$.

II-5d) Montrer que $X_n = Y_n$ pour tout $n \geq T_N$.

II-5e) Montrer soigneusement que

$$\sum_{s \in C_N} |\mu Q_0^n(s) - \pi(s)| \leq 2\, \mathbb{P}(T_N > n).$$

II-6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\tau_0 = 0$ et $\tau_{n+1} = \inf\{k > \tau_n : X_k \neq X_{\tau_n}\}$.

II-6a) Montrer par récurrence que les τ_n sont des temps d'arrêt.

II-6b) Montrer que les v.a. $\tau_{n+1} - \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont indépendantes. Préciser leur loi.

II-6c) On pose $Z_n = X_{\tau_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la marche simple de poids uniformes sur le graphe C_N. On notera $Q = (p(s, s'))_{s,s' \in C_N}$ la matrice de transition de cette marche et on la calculera explicitement.

II-6d) Pour tout $s \in C_N$, on pose $T_s = \inf\{n \geq 0 : Z_n = s\}$ et $T_s^+ = \inf\{n \geq 1 : Z_n = s\}$, avec la convention habituelle que $\inf \varnothing = \infty$. Calculer $\mathbb{E}_s[T_s^+]$. Justifier soigneusement.

II-7) On veut calculer $\#\mathcal{T}(C_N)$. Pour cela on note V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : C_N \to \mathbb{R}$. Pour toutes fonctions $f, g \in V$, on pose

$$(f, g)_V = \sum_{s \in C_N} f(s) g(s),$$

qui est un produit scalaire sur V.

Pour tous $s = (s_1, \dots, s_N) \in C_N$ et $s' = (s'_1, \dots, s'_N) \in C_N$, on pose

$$\langle s, s' \rangle = \sum_{1 \leq i \leq N} s_i s'_i$$

et on définit

$$s \oplus s' = (s''_1, \ldots, s''_N) \in C_N \quad \text{où pour tout } i \in \{1, \ldots, N\},\ s''_i = s_i + s'_i \mod 2.$$

Pour tout $s \in C_N$, on définit la fonction $\phi_s \in V$ en posant

$$\phi_s(s') = (-1)^{\langle s, s' \rangle} \qquad \text{pour tout } s' \in C_N.$$

II-7a) Quelle est la dimension de V ?

II-7b) On note $\Delta = N(\mathrm{Id} - Q)$, endomorphisme de V appelé laplacien. Pourquoi est-il appelé Laplacien?

II-7c) Soit un entier $p \geq 2$. Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions non nulles telles que $(f_i, f_j)_V = 0$ pour tous $1 \leq i < j \leq p$. Montrer que ces fonctions sont linéairement indépendantes dans V.

II-7d) Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on note e_i le vecteur de C_N dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle de rang i : $e_i = (e_i(1), \ldots, e_i(N))$ où $e_i(j) = 0$ si $j \neq i$ et $e_i(i) = 1$.

Montrer que pour tous $s = (s_1, \ldots, s_N) \in C_N$ et tous $s' = (s'_1, \ldots, s'_N) \in C_N$, et tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on a :

$$\phi_s(s' \oplus e_i) = (-1)^{s_i} \phi_s(s').$$

II-7e) Montrer que $s \in C_N \to s \oplus e_i \in C_N$ est une bijection. On note $o = (0, \ldots, 0)$ le vecteur nul de C_N. En déduire que $(\phi_s, \phi_o)_V = 0$ si $s \neq o$. Que vaut $(\phi_o, \phi_o)_V$?

II-7f) Soient $s, \sigma \in C_N$. Montrer que $(\phi_s, \phi_\sigma)_V = (\phi_{s \oplus \sigma}, \phi_0)_V$.

II-7g) Montrer que

$$\#\mathcal{T}(C_N) = 2^{2^N - N - 1} \prod_{k=1}^{N-1} k^{\binom{N}{k}}.$$

Exercice III

Énoncer puis démontrer le lemme des réveils dans le cas de N réveils de paramètres $q_1, \ldots, q_N$ qui sont des réels strictement positifs.

Exercice IV

On considère une file d'attente $(M/M/K/\infty/FIFO)$. Les temps d'inter-arrivée des clients sont des variables exponentielles indépendantes de paramètre noté a et les temps de services sont des exponentielles notées b. On suppose que $ab > 0$. On note X_t le nombre de clients en attente ou en train d'être servis à l'instant t. On suppose que $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ est un processus Markovien (continu à droite et minimal).

IV-1) Préciser l'espace d'état. Déterminer le générateur du processus (on le notera $G = (q_{i,j})$).

IV-2) Montrer que le processus est irréductible.

IV-3) Déterminer en fonction de a, b et K si le processus est transient, récurrent nul ou récurrent positif : on calculera ses mesures invariantes. Dans le cas récurrent positif on notera m son unique probabilité invariante, que l'on calculera.

IV-4) On note N_t le nombre de guichets occupés à l'instant t. On se place dans le cas récurrent positif : montrer que $\mathbb{P}$-presque sûrement

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t N_s \, ds = c,$$

où c est une constante que l'on exprimera en fonction de m : interpréter cette quantité.

Exercice V

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, un espace de probabilité sur lequel sont définies les variables indépendantes $X_0, Y_k,\ k \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que X_0 est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on suppose ensuite que les Y_k suivent une loi exponentielle de paramètre $\theta \in]0, \infty[$, et on suppose enfin que les Z_k sont des variables géométriques de paramètre $1/2$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(Z_k = j) = 2^{-j-1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$N_t = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n), \qquad X_t = \max(X_0,\ \max_{1\leq k\leq N_t} Z_{N_k}),$$

avec la convention que $X_t = X_0$ si $N_t = 0$. On rappelle que $(N_t)_{t\geq 0}$ est le processus de Poisson linéaire d'intensité θt et qu'il possède les propriétés suivantes :

- $N_0 = 0$ p.s., et pour tout $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre θt,
- pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, $N_{t+s} - N_s$ est indépendant de $(N_u)_{u\in[0,s]}$ et a même loi que N_t.

V-1) Montrer que $\mathbb{P}$-p.s. $t \mapsto X_t$ est croissant et tend vers ∞.

V-2) Soit $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}(X_0 = i) > 0$. Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $j > i$. On pose $f_t(i,j) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i)$. Calculer $f_t(i,j)$ en fonction de j, t et θ. Est-ce résultat dépend de i ?

V-3) Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Markovien à valeurs dans $\mathbb{N}$.

V-4) Préciser le générateur de $(X_t)_{t\geq 0}$.

V-5) Il s'agit d'une question intermédiaire. Sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite de variables $(V_k)_{k\geq 1}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi notée ν. On suppose que $V(0) = 0$. On suppose également que sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ est également définie une variable $S_0 : \Omega \to \mathbb{N}$ qui est indépendante de $(V_k)_{k\geq 1}$. On pose $S_k = S_0 + V_1 + \cdots + V_k$, pour tout $k \geq 1$.On se donne également un processus de Poisson $(N'_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ d'intensité 1 indépendant de $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Montrer que $(S_{N'_t})_{t\geq 0}$ est un processus Markovien à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont on calculera le générateur. On appelle $(S_{N'_t})_{t\geq 0}$ *une marche aléatoire de loi de saut* ν.

V-6) Soit $v : \mathbb{N} \to [a, \infty[$ où a est un réel strictement positif. On pose

$$A_t = \int_0^t v(X_s)\, ds, \qquad \tau_t = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : A_s > t\}$$

avec la convention que $\inf \varnothing = \infty$.

V-6a) Montrer que $\mathbb{P}$-p.s. $\tau_t < \infty$.

V-6b) On pose $X'_t = X_{\tau_t}$ pour tout $t \geq 0$. On rappelle que $(X'_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov. Trouver v pour que X' soit une marche aléatoire dont on précisera la loi de saut.

Exercice VI

On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}^*$, on définit la loi μ_β sur $\mathbb{R}_+^*$, muni des Boréliens, par $\mu_\beta(dt) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)t^{-\beta}l(dt)$, où l désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On rappelle la définition de la fonction Γ d'Euler sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'intégrale

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1}e^{-x}l(dx).$$

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on se donne $\Pi_\beta : \Omega \to S_{\mathbb{R}_+}$, un nuage Poissonien d'intensité μ_β. On pose $S_\beta = \sum_{X \in \Pi_\beta} X$, qui est une variable $\mathscr{F}$-mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$.

VI-1) Pour quels $\beta \in \mathbb{R}^*$ a-t-on $\mathbb{P}(S_\beta < \infty) = 1$? Que vaut $\mathbb{P}(S_\beta < \infty)$ si $\mathbb{P}(S_\beta < \infty) < 1$?

VI-2) On suppose que $\mathbb{P}(S_\beta < \infty) = 1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, calculer $\mathbb{E}[\exp(-\lambda S_\beta)]$ en fonction de λ, β et Γ.

VI-3) On fixe $\beta = 7/3$. Trouver $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ continue strictement décroissante bijective telle que $f(\Pi_{7/3})$ soit un nuage Poissonnien d'intensité l sur $\mathbb{R}_+^*$.

VI-4) On fixe $\beta = 7/3$. Montrer qu'il existe une suite de variables $(X_n)_{n \geq 1}$ telles que $\mathbb{P}$-presque sûrement, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $X_n > X_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ et $\Pi_{7/3} = \{X_n : n \in \mathbb{N}^\star\}$. Calculer la fonction de répartition de X_n (sous la forme d'une somme de fonctions élémentaires).

VI-5) On fixe $\beta = 7/3$ et on reprend les notions de la question précédente. Montrer qu'il existe des constantes strictement positives c et C, que l'on précise, telles que $\lim_{n\to\infty} nX_n = C$ presque sûrement.

Exercice VII

Soit Π un nuage Poissonien sur $\mathbb{R}$ d'intensité la mesure de Lebesgue. On imagine un glouton partant de l'origine 0 qui mange les points de Π de proche en proche : il mange d'abord le point de Π le plus proche de 0, puis le plus proche parmi les points qui restent... et ainsi de suite. On se demande s'il mange ainsi tous les points de Π.

Formellement, on note $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des points mangés par le glouton : on a $Y_0 = 0$, Y_1 est le point de Π le plus proche de 0 et si $n \geq 1$, Y_{n+1} est le point de $\Pi \setminus \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ le plus proche de Y_n.

Au temps $n \geq 2$, le glouton se trouve au bord d'un “trou” qu'il a déjà exploré : il s'agit d'un intervalle $I_n = [G_n, D_n]$ tel que

$$G_n, D_n \in \mathbb{R}_+, \quad Y_n \in \{G_n, D_n\}, \quad \{0\} \cup \Pi \cap (G_n, D_n) = \{Y_0, \ldots, Y_n\}.$$

Si le glouton est dans $\mathbb{R}_+$, alors $Y_n > 0$, $G_n < 0$, le “trou” est sur sa gauche et sa droite est une partie inexplorée de Π. De même, si le glouton est dans $\mathbb{R}_-$ alors $G_n = Y_n < 0$, $D_n > 0$, le “trou” est sur sa droite et à gauche il reste une partie inexplorée de Π. On dit que le glouton effectue une *traversée* si à l'instant n il est à gauche (resp. à droite) du trou et qu'à l'instant $n + 1$ il se retrouve à droite (resp. à gauche) du trou.

VII-1) Montrer qu'il existe une suite d'exponentielles $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ indépendantes de paramètre 1 telles que $l(n) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$.

VII-2) Montrer que le glouton effectue une traversée entre n et $n+1$ si et seulement si $\varepsilon_{n+1} > l(n)$.

VII-3) Montrer que $\mathbb{P}$-p.s. le glouton ne visite pas tous les points de Π et qu'il en laisse même une infinité de côté.