MASTER 2, 1ère session, Markov I.

Sorbonne Université, le 12 novembre 2021.

Durée 3 heures; notes de cours autorisées.

Les étudiants n'ayant suivi que la première partie de Markov I: les exercices vont de **I** à **IV**

Exercice I. On note chaque jour la quantité d'argent liquide présent dans les coffres d'une banque à son ouverture. Cette quantité évolue de la manière suivante.

– A la fin d'une journée, *ou bien* 1 kilo-euro a été déposé par les clients avec probabilité $1/2$, *ou bien* 1 kilo-euro a été retiré avec probabilité $1/2$.

– Si à la fin de la journée, il n'y a plus d'argent liquide dans les coffres, le banquier appelle une compagnie de transport de fonds qui, durant la nuit, apporte s kilo-euros (ici, $s \geq 3$). la banque ouvre le lendemain avec s kilo-euros d'argent liquide dans ses coffres.

– Garder de l'argent sous forme liquide est coûteux, car il n'est pas investi. C'est pour cette raison qu'à la fin d'une journée, s'il y a S kilo-euros (ici, $S > s+3$), le banquier appelle une compagnie de transport de fonds qui, durant la nuit, emporte $S-s$ kilo-euros et les apporte à la maison-mère (qui place cet argent): la banque ouvre le lendemain avec s kilo-euros d'argent liquide dans ses coffres.

On note X_n la quantité d'argent liquide à l'ouverture de la banque au n-ième jour.

I-1) Expliquer pourquoi $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov dont l'espace d'états est $\{1,\ldots,S-1\}$ et dont la matrice de transition est donnée par $p(i,i+1)=p(i,i-1)=1/2$, pour tout $2 \leq i \leq S-2$ et

$$p(1,2)=p(1,s)=p(S-1,S-2)=p(S-1,s)=1/2 \ .$$

I-2) Montrer que la chaîne est irréductible. Calculer sa période en fonction de la parité de s et de S.

I-3) Calculer sa probabilité invariante, qui est notée π (attention: elle n'est pas réversible).

I-4) On pose $Y_n = (X_n, X_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov dont on précise l'espace d'états et la matrice de transition. Montrer que c'est une chaîne irréductible et calculer sa probabilité invariante.

I-5) Chaque kilo-euro immobilisé en liquide pendant une journée à la banque coûte r euros par jour. Par ailleurs la compagnie de transport de fonds facture c euros par kilo-euro transporté. On note C_n le coût pour la banque de sa gestion de l'argent liquide du matin du jour 0 au matin du jour $n+1$. Montrer qu'il existe une fonction $C(s,S,r,c)$ telle que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \lim_n C_n/n = C(s,S,r,c) \ .$$

Exercice II. Les graphes $\mathbf{G}=(\mathbf{S},\mathbf{A})$ considérés ici sont simples (les arêtes ne sont pas orientées, elles ne sont pas multiples, il n'y a pas de boucle) et l'ensemble des arêtes est un ensemble de paires non-ordonnées de sommets distincts: $\mathbf{A} \subset \{\{i,j\}\,;\, i,j \in \mathbf{S} \text{ distincts}\}$. On suppose le graphe $\mathbf{G}$ connexe. On munit chaque arête $a \in \mathbf{A}$ d'un poids $C_a > 0$. Pour tout $i \in \mathbf{S}$, on pose $\pi(i) = \sum_{j:\{i,j\}\in\mathbf{A}} C_{\{i,j\}}$. On suppose que $\pi(i) \in]0,\infty[$ pour tout $i \in \mathbf{S}$. On pose également $\pi(\mathbf{G}) = \sum_{i\in\mathbf{S}} \pi(i)$ (possiblement infini). Dans la suite, pour simplifier, on appelle $\mathbf{C}=(C_a)_{a\in\mathbf{A}}$, π et $\pi(\mathbf{G})$ les *données du problème.* On note $\mathbb{T}(\mathbf{G})$ l'ensemble des arbres couvrants de $\mathbf{G}$. On rappelle qu'un arbre couvrant $T \in \mathbb{T}(\mathbf{G})$ est simplement donné par l'ensemble de ses arêtes.

II-1) Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q=(p(i,j))_{i,j\in\mathbf{S}}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathscr{M}_1(\mathbf{S}))$, une chaîne de Markov qui est la marche aléatoire sur le graphe $\mathbf{G}$ muni des poids $\mathbf{C}=(C_a)_{a\in\mathbf{A}}$.

II-1a) Rappeler Q en fonction des données du problème. Est-ce que la marche est irréductible ? Est-elle réversible ? Trouver une mesure Q-invariante.

II-1b) On suppose que $\pi(\mathbf{G}) < \infty$. Pour tout $i \in \mathbf{S}$, on pose

$$T_i = \inf\{n \geq 0 : X_n = i\} \quad \text{et} \quad T_i^+ = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\} \ ,$$

avec la convention habituelle que $\inf \emptyset = \infty$. Calculer $\mathbf{E}_i[T_i^+]$ en fonction des données du problème. (Justifier soigneusement sa réponse).

II-1c) On suppose désormais $\mathbf{G}$ *fini*. On introduit l'ensemble aléatoire d'arêtes

$$\mathcal{T} = \big\{ \{X_{T_j - 1}, j\} ; j \in \mathbf{S} \backslash \{X_0\} \big\} \ ,$$

qui est appelé *l'arbre de premier passage de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $i \in \mathbf{S}$. Trouver un résultat du cours qui montre que $\mathbf{P}_i$-p.s. $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathbf{G})$ et expliciter la loi de $\mathcal{T}$ sous $\mathbf{P}_i$ en fonction des données du problème. Est-ce que cette loi dépend de i ?

II-2) Soit N, un entier ≥ 3 et $q_1, \ldots, q_N \in]0,1[$ tels que $q_1 + \ldots + q_N = 1$. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité sur lequel sont définies $Y_p : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$, $p \in \mathbb{N}$, des v.a. indépendantes de loi $\mathbf{P}(Y_p = k) = q_k$, $1 \leq k \leq N$. On note $\mathbf{K}_N = (\mathbf{S}, \mathbf{A})$ le graphe complet à N sommets: i.e. $\mathbf{S} = \{1, \ldots, N\}$ et $\mathbf{A} = \{\{i,j\} \ ; \ 1 \leq i < j \leq N\}$.

II-2a) On définit récursivement les temps aléatoires τ_n, $n \in \mathbb{N}$ en posant $\tau_0 = 0$ et $\tau_{n+1} = \inf\{p > \tau_n : Y_p \neq Y_{\tau_n}\}$. On pose $X_n = Y_{\tau_n}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche sur $\mathbf{K}_N$ associée à un système de poids $C_{\{i,j\}}$, $1 \leq i < j \leq N$ que l'on précisera. Trouver sa loi invariante.

II-2b) Pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, on pose $\sigma_k = \inf\big\{p \in \mathbb{N} : \#\{Y_0, \ldots Y_p\} = k\big\}$. On pose alors $\mathcal{T} = \big\{\{Y_{\sigma_k - 1}, Y_{\sigma_k}\}; 2 \leq k \leq N\big\}$. Montrer que $\mathbf{P}$-p.s. $\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N$ et montrer pour tout $T \in \mathbb{T}_N$,

$$\mathbf{P}(\mathcal{T} = T) = c \prod_{1 \leq k \leq N} q_k^{\mathtt{deg}_T(k)} \ ,$$

où $\mathtt{deg}_T(k)$ le degré de k dans T (i.e. le nombre de sommets $j \in \{1, \ldots, N\}$ reliés à k par une arête de T) et où c est une constante de normalisation. Pour quels $(q_1, \ldots, q_N)$, $\mathcal{T}$ est-il de loi uniforme ?

Exercice III. On considère une agence comportant K guichets ($K \geq 2$). Cette agence n'a pas de salle d'attente. Les temps d'arrivée des clients forment un processus de Poisson linéaire et homogène de paramètre $a \in]0, \infty[$ (c'est-à-dire que les intervalles de temps entre les arrivées de deux clients successifs sont des exponentielles indépendantes de paramètre a). Lorsqu'un client arrive dans l'agence et qu'un guichet est libre, il s'y précipite. Si, lors de son arrivée, tous les guichets sont occupés, il est refoulé et repart tout de suite sans jamais revenir. Lorsqu'un client arrive à un guichet, il y reste durant un certain temps qui est appelé son temps de service. On suppose que les temps de service des clients sont des variables indépendantes entre elles et indépendantes des temps d'arrivées. On suppose également que les temps de service suivent une loi exponentielle de paramètre $b \in]0, \infty[$. Au temps $t \in [0, \infty[$, on note X_t le nombre de guichets occupés dans l'agence. On suppose que toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On admet que $X = (X_t, t \geq 0)$ est un processus Markovien dont l'espace d'états est $E = \{0, 1, \ldots, K\}$. On note $G = (q_{i,j})_{0 \leq i,j \leq K}$, son générateur infinitésimal.

III-1) (Question préliminaire.) Soit $(\mathbf{e}_j)_{1 \leq j \leq n}$ une suite de v.a. exponentielles indépendantes de paramètres respectifs $(q_j)_{1 \leq j \leq n}$ (supposés à valeurs dans $]0, \infty[$). On pose $\mathbf{e} = \inf_{1 \leq j \leq n} \mathbf{e}_j$. Montrer que $\mathbf{e}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. Montrer qu'il existe un indice aléatoire $N : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ tel que $\mathbf{P}$-p.s. $\mathbf{e}_N = \mathbf{e}$ et $\mathbf{e} > \min_{j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{N\}} \mathbf{e}_j$. Montrer que N est indépendant de $\mathbf{e}$ et calculer la loi de $\mathbf{e}$.

III-2) Justifier que le générateur infinitésimal G de X est donné par $q_{i,j} = 0$ si $|i-j| \geq 2$ et $q_{i,i+1} = a$ pour tout $0 \leq i \leq K-1$ et $q_{i,i-1} = bi$ pour tout $1 \leq i \leq K$.

III-3) Justifier qu'il y a une unique probabilité G-invariante, notée m. Calculer m en fonction de a, b et K.

III-4) Pour tout $t \in [0, \infty[$, on note A_t la quantité de temps pendant laquelle l'agence est pleine entre les instants 0 et t: $A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = K\}} ds$. Montrer que la limite $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} A_t$ existe et calculer cette limite.

III-5) On note R_t le nombre de clients refoulés entre les instants 0 et t. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[R_t \mid A_t]$.

III-6) Montrer que la limite $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbf{E}[R_t]$ existe et la calculer en fonction de a, b et K. On suppose que $b = 1$ et que les temps d'inter-arrivée des clients sont K fois plus courts en moyenne que les temps de service. On note $L(K) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbf{E}[R_t]$. Montrer que

$$L(K) \sim_{K\to\infty} \sqrt{\frac{K}{8\pi}} \; .$$

Exercice IV. Soit un entier $N \geq 2$. Par commodité on pose $E = \{1, \dots, N\}$ et on fixe

$$\big(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbf{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, G = (q_{i,j})_{i,j\in E}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathscr{M}_1(E)\big) \; ,$$

un processus Markovien supposé continu à droite. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $P_t = (p_t(i,j))_{i,j} \in E$, le semi-groupe associé. On note $L_b(E)$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ (qui est assimilable à $\mathbb{R}^N$) et pour tout $f \in L_b(E)$, on pose $\|f\|_\infty = \max_{i\in E} |f(i)|$. On voit P_t et G comme des matrices $N \times N$. Soit M, une matrice $N \times N$. On note $\exp(M) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} M^n$ la matrice exponentielle de M.

IV-1) Justifier soigneusement que $P_t = \exp(tG)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

IV-2) Soit $f \in L_b(E)$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $i \in E$. Montrer que $t \in \mathbb{R}_+ \to P_t f(i)$ est dérivable de dérivée égale à $(P_t G)f(i)$ qui vaut aussi $(GP_t)f(i)$.

IV-3) On pose D l'ensemble des trajectoires continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E, muni de la tribu $\mathscr{B}$ engendrée par le pi-système $\mathscr{C}$ des ensembles de la forme $C = \{(x_t)_{t\in\mathbb{R}_+} : x_{t_0} = i_0; \dots; x_{t_n} = i_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, $i_0, \dots, i_n \in E$. Soit un réel $p \in]0, \infty[$, $f \in L_b(E)$ et I un intervalle d'intérieur non-vide de $\mathbb{R}_+$ (possiblement non-borné). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\mathbf{x} = (x_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in D$, on pose $\phi_n(\mathbf{x}) = \int_{I\cap[0,n]} e^{-pt} f(x_{2^{-n}\lceil 2^n t\rceil})dt$ et $\phi(\mathbf{x}) = \int_I e^{-pt} f(x_t)dt$.

IV-3a) Montrer que ϕ_n est $\mathscr{B}$-mesurable. En déduire que ϕ aussi.

IV-3b) Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et tout $\mathbf{x} = (x_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in D$, on pose $\theta_{t_0}\mathbf{x} = (x_{t_0+t})_{t\in\mathbb{R}_+}$. Montrer que $\theta_{t_0} : D \to D$ est $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$-mesurable.

IV-3c) On considère le cas où $I = \mathbb{R}_+$. Exprimer $\int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(x_t)dt$ en fonction de $\phi(\theta_{t_0}\mathbf{x})$.

IV-4) Soit $p \in]0, \infty[$. Montrer que l'on définit une matrice $N \times N$, notée $U_p : L_b(E) \to L_b(E)$ en posant pour tout $f \in L_b(E)$, $i \in E$, $U_p f(i) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t f(i)\, dt$. Montrer que $\|pU_p f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

IV-5) Montrer que pour tout $f \in L_b(E)$ et tout $i \in E$, on a $\lim_{p\to\infty} pU_p f(i) = f(i)$.

IV-6) En appliquant la propriété de Markov, calculer pour tout $i \in E$, $\mathbf{E}_i\big[\int_t^\infty e^{-ps} f(X_s)\, ds \big| \mathscr{F}_t\big]$.

IV-7) Déduire de la question précédente que

$$\tfrac{1}{t}\big(P_t(U_p f)(i) - U_p f(i)\big) = \tfrac{e^{pt}-1}{t} U_p f(i) - e^{pt} \int_0^1 e^{-pts} P_{ts} f(i)\, ds \; .$$

On pose $g = U_p f$. En déduire que $Gg(i) = pg(i) - f(i)$.

IV-8) Montrer que U_p est inversible et calculer sont inverse en fonction de p et de G.

IV-9) Soit $i \in E$, T, un $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-temps d'arrêt tel que $\mathbf{E}_i[T] < \infty$. Soit $g \in L_b(E)$.

IV-9a) Pour tout $\mathbf{x} = (x_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in D$, on pose $\phi(\mathbf{x}) = \int_0^\infty e^{-pt} g(X_t)\, dt$. Montrer $\mathbf{E}_i[\phi(\mathbf{X})] = U_p g(i)$.

IV-9b) Montrer que $U_p g(i) = \mathbf{E}_i\big[\int_0^T e^{-pt} g(X_t)\, dt\big] + \mathbf{E}_i\big[e^{-pT} U_p g(X_T)\big]$.

IV-9c) En déduire pour tout $f \in L_b(E)$, que $\mathbf{E}_i[e^{-pT} f(X_T)] = f(i) + \mathbf{E}_i\big[\int_0^T e^{-pt}((G - p\mathtt{Id})f)(X_t)\, dt\,\big]$.

IV-9d) Déduire de ce qui précède que pour toute fonction $f \in L_b(E)$, $\mathbf{E}_i[f(X_T)] = f(i) + \mathbf{E}_i[\int_0^T (Gf)(X_t)\, dt]$. (On justifiera soigneusement tout passage à la limite.)

Exercice V. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa base canonique et de la norme Euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$. On note ℓ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On note v_d le volume de la boule unité. Si $B(x,r)$ dénote la boule ouverte de centre x et de rayon r, on a donc $\ell_d(B(x,r)) = v_d r^d$. On rappelle la formule de changement de variable radial: si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, est mesurable alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\big(\|x\|\big)\, \ell_d(dx) = d v_d \int_{\mathbb{R}_+} f(r) r^{d-1}\, \ell_1(dr) \ .$$

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité sur lequel est défini un nuage Poissonnien $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}^d}$ d'intensité ℓ_d. On pose

$$\Pi_0 = \big\{\|X\|\, ;\, X \in \Pi\big\} \ .$$

V-1) Montrer que Π_0 est presque sûrement égal à un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ dont on précisera l'intensité.

V-2) On note $\phi(r) = br^\beta$. Pour quelles valeurs de b et de β, $\phi(\Pi_0)$ est un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité ℓ_1 ?

V-3) Montrer qu'il existe une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables $\mathscr{F}$-mesurables telles que $0 < \|X_n\| < \|X_{n+1}\|$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et telles que $\Pi = \{X_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ presque sûrement. Trouver la fonction de répartition de $\|X_n\|$.

V-4) Montrer qu'il existe des constantes strictement positives c_d et C_d (que l'on calculera) telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \lim_{n\to\infty} n^{-c_d} \|X_n\| = C_d \ .$$

V-5) Trouver la densité de $\|X_n\|$.

V-6) On note μ la loi uniforme sur la sphère unité $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$. On rappelle que si $Z : \Omega \to B(0,1)$ a pour loi $(v_d)^{-1}\ell_d(\,\cdot\, \cap B(0,1))$, alors $(\|Z\|)^{-1} Z$ a pour loi μ. Montrer qu'il existe une suite $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 1}$, de variable i.i.d. de loi exponentielles de paramètre 1, et une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$, de variable i.i.d. de loi μ, telles que $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 1}$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \Pi = \big\{a_d(\mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n)^{\gamma_d} \cdot Z_n \, ;\, n \in \mathbb{N}^*\big\} \ ,$$

où on précisera les constantes a_d et γ_d.
