M2 probabilités et applications, 2022-2023
Calcul stochastique et processus de diffusion
Examen de janvier 2023

Calculettes et téléphones interdits.
Documents autorisés : une copie double manuscrite.
Durée 3 heures.

Question de cours. Rappeler le théorème de Dubins-Schwarz. Le démontrer dans le cas simplifié où $t \mapsto \langle M \rangle_t$ est p.s. strictement croissant et tend p.s. vers l'infini quand $t \to \infty$.

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien (de dimension 1 issu de 0) et, pour $a > 0$, $\tau_a = \inf\{t > 0 : B_t = a\}$. Calculer $\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_a}]$ pour $\lambda > 0$.

Exercice 2. Soient $d \geq 2$ et $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mesurable et bornée, soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $T \in \mathbb{R}_+$.
(a) Montrer que l'E.D.S. d-dimensionnelle (avec B un mouvement brownien de dimension d issu de 0)

$$X_t = x_0 + B_t + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$$

admet une solution (faible) sur $[0, T]$. *On pourra partir d'un mouvement brownien $(X_t)_{t \geq 0}$ de dimension d issu de x_0, introduire la martingale $L_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t b_i(X_s)\mathrm{d}X_s^i$ et utiliser le théorème de Girsanov et le théorème de Lévy.*
(b) Montrer que si $x_0 \neq 0$, cette solution ne touche p.s. pas 0. *On rappelle qu'un mouvement brownien de dimension d non issu de 0 ne touche p.s. jamais 0.*

Exercice 3. Soient b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, avec $b, \sigma, b', \sigma', b'', \sigma''$ bornées. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on note $(X_t^x)_{t \geq 0}$ l'unique solution de

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\mathrm{d}B_s.$$

(a) Expliquer pourquoi cette solution existe et est unique.
(b) Montrer que pour tout $T > 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_*$, tout $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}[(X_t^{x+h} - X_t^x)^4] \leq C_T h^4$. *On rappelle que $(a + b + c)^4 \leq 27(a^4 + b^4 + c^4)$. On sait déjà, par le cours, que pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et chaque $h \in \mathbb{R}_*$, $\mathbb{E}[(X_t^{x+h} - X_t^x)^4]$ est bornée sur $[0, T]$.*
(c) Qu'en déduit-on, par le critère de Kolmogorov ?
(d) Montrer que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, l'équation d'inconnue $(D_t^x)_{t \geq 0}$ (continue et adaptée)

$$D_t^x = 1 + \int_0^t b'(X_s^x)D_s^x\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma'(X_s^x)D_s^x\mathrm{d}B_s$$

admet exactement une solution (penser aux semimartingales exponentielles).
(e) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_*$, on pose $\Delta_t^{x,h} = h^{-1}(X_t^{x+h} - X_t^x) - D_t^x$. Montrer que

$$\begin{aligned}\Delta_t^{x,h} = &\int_0^t \Big[\frac{b(X_s^{x+h}) - b(X_s^x) - b'(X_s^x)(X_s^{x+h} - X_s^x)}{h} + b'(X_s^x)\Delta_s^{x,h}\Big]\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \Big[\frac{\sigma(X_s^{x+h}) - \sigma(X_s^x) - \sigma'(X_s^x)(X_s^{x+h} - X_s^x)}{h} + \sigma'(X_s^x)\Delta_s^{x,h}\Big]\mathrm{d}B_s.\end{aligned}$$

(f) Montrer que $\lim_{h \to 0} \mathbb{E}[(\Delta_t^{x,h})^2] = 0$ pour tout $t \geq 0$, tout $x \in \mathbb{R}$. *On admettra que la partie martingale locale est une vraie martingale. On rappelle que $(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.*

Problème. On souhaite montrer que si $\delta \geq 2$, il y a existence et unicité trajectorielle d'une solution strictement positive à l'E.D.S. unidimensionnelle

$$(EDS(\delta)) \qquad X_t = 1 + B_t + \frac{\delta - 1}{2} \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{X_s}.$$

A. Montrer que si W_t est un mouvement brownien de dimension $d \geq 2$ issu d'un point de norme 1, alors $X_t = ||W_t||$ est solution (faible) de $(EDS(d))$. *On rappelle que p.s., pour tout $t \geq 0$, $||W_t|| > 0$.*

B. Montrer que pour tout $\delta \in \mathbb{R}$, si $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ sont solutions (continues) strictement positives de $(EDS(\delta))$ avec le même mouvement Brownien, alors $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ sont indistinguables. *On pourra introduire la famille de temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 1/n$ ou $\tilde{X}_t \leq 1/n\}$ et étudier $|X_{t\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_n}|$.*

C. Soit $\sigma \equiv 1$ et soient b et $\tilde{b}$ deux fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de constante de Lipschitz L. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $b(x) \leq \tilde{b}(x)$. On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ ainsi que les solutions (uniques) $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ à $E_{x_0}(\sigma, b)$ et $E_{x_0}(\sigma, \tilde{b})$, conduites par un même mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$. On se propose de montrer que p.s., $\forall\, t \geq 0, \quad X_t \leq \tilde{X}_t$.

(a) Soit $\varphi(x) = (\max\{0, x\})^3$, qui est C^2 sur $\mathbb{R}$ (facile, admis). Montrer que

$$\forall\, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x - \tilde{x})[b(x) - \tilde{b}(\tilde{x})] \leq 3L\varphi(x - \tilde{x}).$$

(b) Montrer que p.s., pour tout $t \geq 0$, $\varphi(X_t - \tilde{X}_t) = \int_0^t \varphi'(X_s - \tilde{X}_s)[b(X_s) - \tilde{b}(\tilde{X}_s)]\mathrm{d}s$.

(c) Conclure.

D. On considère une solution strictement positive $(X_t)_{t\geq 0}$ à $(EDS(2))$, avec un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ (par exemple la solution construite en A). On pose $\sigma \equiv 1$ et, pour $\delta \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n,\delta}(x) = \frac{\delta - 1}{2 \max\{x, \frac{1}{n}\}}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\delta \geq 2$, l'E.D.S. $E_1(\sigma, b_{n,\delta})$ admet une unique solution $(X_t^{n,\delta})_{t\geq 0}$ (avec le mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$).

(b) On pose $\tau_{n,\delta} = \inf\{t > 0 : X_t^{n,\delta} \leq \frac{1}{n}\}$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\delta > 2$, on a $\tau_{n,\delta} \geq \tau_{n,2}$.

(c) Montrer que $X_t^{n,2} = X_t$ sur $[0, \tau_{n,2}]$. *On pourra introduire $\bar{\tau}_{n,2} = \inf\{t > 0 : X_t \leq \frac{1}{n}\}$, montrer que $X_t^{n,2} = X_t$ sur $[0, \tau_{n,2} \wedge \bar{\tau}_{n,2}]$, puis que $\tau_{n,2} = \bar{\tau}_{n,2}$.*

(d) Montrer que $\tau_{n,2} \to \infty$ p.s. quand $n \to \infty$.

On fixe maintenant $\delta > 2$.

(e) Montrer que $\tau_{n,\delta} \to \infty$ p.s. quand $n \to \infty$.

(f) Montrer que si $n > m > 0$, alors $X_t^{n,\delta} = X_t^{m,\delta}$ sur $[0, \tau_{m,\delta}]$. *Etudier* $|X^{n,\delta}_{t\wedge\tau_{n,\delta}\wedge\tau_{m,\delta}} - X^{m,\delta}_{t\wedge\tau_{n,\delta}\wedge\tau_{m,\delta}}|$.

(g) Conclure l'existence d'une solution strictement positive à $(EDS(\delta))$.

Exercice 4. On considère un processus continu $(U_t)_{t\geq 0}$, strictement positif, adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On introduit $A_t = \int_0^t U_s \mathrm{d}s$, on suppose que $A_\infty = \infty$ et on introduit sa fonction réciproque τ_t (on a donc $A_{\tau_t} = t$ et $\tau_{A_t} = t$).

(a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, τ_t est un $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$-temps d'arrêt. On peut donc poser $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$.

(b) Montrer que pour tout $t \geq 0$, A_t est un $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$-temps d'arrêt. On pose $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_{A_t}$.

(c) Montrer que $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t$ (on supposera la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ continue à droite).