M2 probabilités et applications, 2021-2022
Calcul stochastique et processus de diffusion
Examen de janvier 2022

Calculettes et téléphones interdits.
Documents autorisés : une copie double manuscrite.
Durée 3 heures.

Question de cours. Montrer, sans utiliser la notion de variation quadratique, que toute martingale locale continue issue de 0 à variation finie est indistinguable de 0. *On pourra commencer par le cas d'une martingale bornée dont la variation totale est bornée.*

Exercice 1. Soit M une martingale locale continue issue de 0 telle que $\langle M\rangle_\infty = \infty$ p.s.

(a) Montrer que $\sigma_x = \inf\{t \geq 0 : M_t = x\}$ est fini p.s. pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(\sigma_a < \sigma_b) = \frac{b}{b-a}$ pour $a < 0 < b$.

Exercice 2. Soit $B = (B^1, B^2)$ un mouvement brownien de dimension 2 issu de x_0, avec $z_0 = ||x_0||^2 > 0$. On sait que p.s., pour tout $t \geq 0$, $B_t \neq 0$.

(a) On pose $X_t = ||B_t||^2$. Montrer qu'il existe un mouvement brownien β de dimension 1 tel que

$$X_t = z_0 + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\mathrm{d}\beta_s + 2t.$$

(b) Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée et $T > 0$. En utilisant le théorème de Girsanov, construire une solution, sur $[0, T]$, à l'E.D.S. (W est ici un mouvement brownien de dimension 1)

$$X_t = z_0 + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\mathrm{d}W_s + \int_0^t [2 + 2\sqrt{X_s}b(X_s)]\mathrm{d}s.$$

(c) Montrer que pour X la solution du point (b), on a p.s., pour tout $t \in [0, T]$, $X_t > 0$.

Exercice 3. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension 1, issu de 0, et $X_t = |B_t|$.

On cherche à montrer qu'il existe un processus croissant (continu adapté) $(L_t)_{t\geq 0}$, appelé temps local, tel que p.s., pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = \int_0^t \mathrm{sg}(B_s)\mathrm{d}B_s + L_t \quad \text{et} \quad \int_0^t X_s \mathrm{d}L_s = 0,$$

où $\mathrm{sg}(x) = \mathbf{1}_{\{x>0\}} - \mathbf{1}_{\{x<0\}}$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon^2 + x^2}$. Montrer que

$$\varphi_\varepsilon(B_t) = \varepsilon + M_t^\varepsilon + L_t^\varepsilon,$$

où $(M_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ est une martingale et $(L_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ est un processus croissant.

(b) Soit $T > 0$. Montrer que $\sup_{[0,T]} |\varphi_\varepsilon(B_t) - X_t| \to 0$ et $\sup_{[0,T]} |M_t^\varepsilon - \int_0^t \mathrm{sg}(B_s)\mathrm{d}B_s| \to 0$ en probabilité.

(c) En déduire que $L_t = X_t - \int_0^t \mathrm{sg}(B_s)\mathrm{d}B_s$ est un processus croissant (continu et adapté).

(d) Montrer que $\int_0^t X_s \mathrm{d}L_s = 0$ p.s. pour tout $t \geq 0$. *On pourra calculer X_t^2 et B_t^2.*

(e) Montrer que $\max\{B_t, 0\} = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s>0\}}\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}L_t$.

Problème. Soit $B = (B^1, B^2)$ un mouvement brownien de dimension 2, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration canonique, et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^2 vérifiant $F(0) = 0$ et (on note $F(x) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$)

$$(*) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) = -\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^2,$$

$$(**) \qquad \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\Big)^2 > 0 \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

Ces conditions disent que F peut être vue comme holomorphe conforme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On souhaite montrer que $(F(B_t))_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien de dimension 2 changé de temps.

Partie 1. (a) On pose $X_t^1 = F_1(B_t)$ et $X_t^2 = F_2(B_t)$. Montrer que

$$X_t^1 = \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(B_s)\mathrm{d}B_s^1 + \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(B_s)\mathrm{d}B_s^2 \qquad \text{et} \qquad X_t^2 = \int_0^t \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(B_s)\mathrm{d}B_s^1 + \int_0^t \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(B_s)\mathrm{d}B_s^2.$$

(b) Montrer que $\langle X^1, X^2\rangle = 0$ et que $\langle X^1\rangle = \langle X^2\rangle$.

On montrera dans la partie 2 que p.s., $t \to \langle X^1\rangle_t$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$ et $\langle X^1\rangle_\infty = \infty$.

(c) Construire une famille croissante de temps d'arrêts $(\tau_t)_{t\geq 0}$ telle que $W_t^1 = X_{\tau_t}^1$ et $W_t^2 = X_{\tau_t}^2$ soient deux $(\mathcal{F}_{\tau_t})_{t\geq 0}$-mouvements browniens. *On pourra utiliser Dubins-Schwarz.*

(d) Montrer que $W = (W^1, W^2)$ est un mouvement brownien de dimension 2.

(e) Conclure.

Partie 2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $\varphi(x) > 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$. On pose $D_t = \int_0^t \varphi(B_s)\mathrm{d}s$. On souhaite montrer que p.s., $t \to D_t$ est strictement croissant et $D_\infty = \infty$.

(a) Soit $t > s \geq 0$. Montrer que p.s., $D_t > D_s$.

(b) Conclure que p.s., $t \to D_t$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer qu'il existe $a > 0$, $r > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi \geq a\mathbf{1}_{B(x_0,r)}$, où $B(x_0, r)$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.
On suppose par la suite que $x_0 = 0$ et $r = 1$ pour simplifier les notations.

(d) On introduit la suite de temps d'arrêts définis par récurrence par $\sigma_0 = \inf\{t > 0 : ||B_t|| = 1/2\}$ et, pour $n \geq 1$,

$$\tau_n = \inf\{t > \sigma_{n-1} : ||B_t|| \geq 1\} \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \inf\{t > \tau_n : ||B_t|| \leq 1/2\}.$$

Montrer rapidement, en utilisant le cours, qu'ils sont tous finis p.s.

(e) Montrer que les v.a. $(\tau_{n+1} - \sigma_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. *On rappelle que le mouvement brownien de dimension 2 satisfait la propriété de Markov forte.*

(f) Conclure.

Exercice 4. On considère un processus continu $(U_t)_{t\geq 0}$, strictement positif, adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On introduit $A_t = \int_0^t U_s\mathrm{d}s$, on suppose que $A_\infty = \infty$ et on introduit sa fonction réciproque τ_t (on a donc $A_{\tau_t} = t$ et $\tau_{A_t} = t$).

(a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, τ_t est un $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$-temps d'arrêt. On peut donc poser $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$.

(b) Montrer que pour tout $t \geq 0$, A_t est un $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$-temps d'arrêt. On pose $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_{A_t}$.

(c) Montrer que $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t$ (on supposera la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ continue à droite).