M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.

Feuille 0.

Solutions

Exercice 1. (i) Pour la borne supérieure, on observe que

$$\mathbb{P}(\xi > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \int_x^\infty u \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Pour la borne inférieure, on utilise l'intégration par parties:

$$\mathbb{P}(\xi > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u} \mathrm{e}^{-u^2/2} \right]_x^\infty - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{1}{u^2} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u,$$

ce qui implique la borne inférieure cherchée, car $\int_x^\infty \frac{1}{u^2} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \le \frac{1}{x^3} \int_x^\infty u \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{x^3}$.

(ii) Pour tout $\lambda > 0$, on a, par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(\xi > x) \le \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda \xi}\right] = \mathrm{e}^{-\lambda x + \lambda^2/2}.$$

On obtient donc l'inégalité cherchée en prenant $\lambda = x$. □

Exercice 2. (i) On a $\mathbb{E}(\xi^4) = 3$, $\mathbb{E}(|\xi|) = (\frac{2}{\pi})^{1/2}$.

(ii) On a $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi}) = \mathrm{e}^{a^2/2}$, $\mathbb{E}(\xi \mathrm{e}^{a\xi}) = a\mathrm{e}^{a^2/2}$. Quant à $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi^2})$, on voit que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi^2}) = \infty$ si $a \ge \frac{1}{2}$, alors que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi^2}) = (1-2a)^{-1/2}$ si $a < \frac{1}{2}$.

(iii) En conditionnant par rapport à la tribu engendrée par ξ, on obtient, grâce à (ii), que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \xi \eta} \,|\, \xi) = \mathrm{e}^{\lambda^2 \xi^2/2}$, qui n'est autre que $\mathrm{e}^{b\xi^2}$. On prend espérance dans les deux côtés de l'identité pour conclure. □

Exercice 3. Pour toute variable aléatoire réelle ξ, on note sa fonction caractéristique par φ_ξ. Par hypothèse, $\varphi_{\xi_n}(t) = \exp(i\mu_n t - \frac{\sigma_n^2}{2} t^2)$ converge simplement vers $\varphi_\xi(t)$. En passant au module, on a aussi $\exp(-\frac{\sigma_n^2}{2} t^2) \to |\varphi_\xi(t)|$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Donc σ_n^2 converge vers $\sigma^2 \ge 0$ (le cas $\sigma_n^2 \to \infty$ est à écarter car la fonction limite $\mathbf{1}_{\{t=0\}}$ n'est pas une fonction caractéristique, étant discontinue au point 0).

Supposons que (μ_n) n'est pas bornée. On peut en extraire une sous-suite (μ_{n_k}) qui tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$ mais le raisonnement sera alors le même). Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. La fonction de répartition F_ξ de ξ étant monotone, on peut trouver $b \ge a$ qui est un point de continuité de F_ξ. Donc

$$F_\xi(a) \le F_\xi(b) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\xi_{n_k} \le b) \le \frac{1}{2},$$

car quand k est grand, $\mathbb{P}(\xi_{n_k} \le b) \le \mathbb{P}(\xi_{n_k} \le \mu_{n_k}) = \frac{1}{2}$. Donc $F_\xi(a) \le \frac{1}{2}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde car F_ξ est une fonction de répartition et sa limite en $+\infty$ vaut 1.

La suite (μ_n) est donc bornée. Si $\mu \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathbb{R}$ sont deux valeurs d'adhérence, alors on aura $\mathrm{e}^{i\mu t} = \mathrm{e}^{i\nu t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui n'est possible que si $\mu = \nu$. Donc la suite (μ_n) converge, vers disons $\mu \in \mathbb{R}$. Comme $\sigma_n \to \sigma$, on a $\varphi_\xi(t) = \exp(i\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2)$. Donc ξ suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$. $\square$

Exercice 4. On utilise le résultat de l'exercice précédent. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi_n}) = \exp\left(a\mu_n + \frac{a^2\sigma_n^2}{2}\right),$$

et comme $\mathrm{e}^{|x|} \le \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$, on a, pour tout $a \ge 0$, $\sup_n \mathbb{E}(\mathrm{e}^{a|\xi_n|}) < \infty$. A fortiori, $\sup_n \mathbb{E}(|\xi_n|^{p+1}) < \infty$ et donc $\sup_n \mathbb{E}(\,|\xi_n - \xi|^{p+1}) < \infty$. Ceci implique que $(|\xi_n - \xi|^p)$ est uniformément intégrable. Comme $|\xi_n - \xi|^p \to 0$ en probabilité, cette convergence a lieu également dans L^1. $\square$

Exercice 5. **(i)** Soient a et b deux réels. Il est clair que $(\xi, \eta, \theta - a\xi - b\eta)$, en tant que transformation linéaire du vecteur gaussien (ξ, η, θ), est un vecteur gaussien. Donc $\theta - a\xi - b\eta$ est indépendante de (ξ, η) si et seulement si $\mathrm{Cov}(\theta - a\xi - b\eta, \xi) = \mathrm{Cov}(\theta - a\xi - b\eta, \eta) = 0$.

Or, $\mathrm{Cov}(\theta - a\xi - b\eta, \xi) = \mathrm{Cov}(\xi, \theta) - a\sigma_\xi^2$, et $\mathrm{Cov}(\theta - a\xi - b\eta, \eta) = \mathrm{Cov}(\eta, \theta) - b\sigma_\eta^2$. En choisissant désormais $a := \mathrm{Cov}(\xi, \theta)/\sigma_\xi^2$ et $b := \mathrm{Cov}(\eta, \theta)/\sigma_\eta^2$, on voit que $\theta - a\xi - b\eta$ est indépendante de (ξ, η). Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi, \eta) &= \mathbb{E}(\theta - a\xi - b\eta \,|\, \xi, \eta) + a\xi + b\eta \\ &= \mathbb{E}(\theta - a\xi - b\eta) + a\xi + b\eta = \mathbb{E}(\theta) + a\xi + b\eta.\end{aligned}$$

D'autre part, $\theta - a\xi$ est indépendante de ξ, car $(\xi, \theta - a\xi)$ est un vecteur gaussien avec $\mathrm{Cov}(\xi, \theta - a\xi) = 0$; donc $\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi) = \mathbb{E}(\theta - a\xi \,|\, \xi) + a\xi = \mathbb{E}(\theta - a\xi) + a\xi = \mathbb{E}(\theta) + a\xi$. De même, $\mathbb{E}(\theta \,|\, \eta) = \mathbb{E}(\theta) + b\eta$. Par conséquent,

$$\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi, \eta) = \mathbb{E}(\theta) + a\xi + b\eta = \mathbb{E}(\theta \,|\, \xi) + \mathbb{E}(\theta \,|\, \eta) - \mathbb{E}(\theta).$$

(ii) Soit $A \in \sigma(\xi\eta)$. Par définition, il existe un borélien $B \subset \mathbb{R}$ tel que $A = \{\omega : \xi(\omega)\eta(\omega) \in B\}$. Donc $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B(\xi\eta)$.

Puisque $(\xi,\,\eta)$ est un vecteur gaussien *centré*, il a la même loi que $(-\xi,\,-\eta)$. Donc $\mathbb{E}[\xi\,\mathbf{1}_B(\xi\eta)] = \mathbb{E}[(-\xi)\mathbf{1}_B((-\xi)(-\eta))] = -\mathbb{E}[\xi\,\mathbf{1}_B(\xi\eta)]$, c'est-à-dire, $\mathbb{E}[\xi\,\mathbf{1}_B(\xi\eta)] = 0$. En d'autres mots, $\mathbb{E}(\xi\,\mathbf{1}_A) = 0$, $\forall A \in \sigma(\xi\eta)$, ce qui signifie que $\mathbb{E}(\xi\,|\,\xi\eta) = 0$.

(iii) On a $\mathbb{E}(\theta\,|\,\xi\eta) = \mathbb{E}(\theta - a\xi - b\eta\,|\,\xi\eta) + a\,\mathbb{E}(\xi\,|\,\xi\eta) + b\,\mathbb{E}(\eta\,|\,\xi\eta)$. D'après (ii), $\mathbb{E}(\xi\,|\,\xi\eta) = 0$; de même, $\mathbb{E}(\eta\,|\,\xi\eta) = 0$. D'où $\mathbb{E}(\theta\,|\,\xi\eta) = \mathbb{E}(\theta - a\xi - b\eta\,|\,\xi\eta)$. Or, on a vu que $\theta - a\xi - b\eta$ est indépendante de $(\xi,\,\eta)$; donc $\mathbb{E}(\theta - a\xi - b\eta\,|\,\xi\eta) = \mathbb{E}(\theta - a\xi - b\eta) = \mathbb{E}(\theta)$, ce qui implique l'identité désirée. $\square$

Exercice 6. (i) Quitte à remplacer η par $\eta + \xi$, on peut supposer que $\xi = 0$. Il s'agit donc de prouver que $\mathbb{E}(\eta\,|\,\mathscr{G}) \geq 0$ p.s. $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_A) \geq 0$, $\forall A \in \mathscr{G}$.

"$\Rightarrow$" Supposons que $\mathbb{E}(\eta\,|\,\mathscr{G}) \geq 0$ p.s. Alors pour tout $A \in \mathscr{G}$, on a $\mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_A\,|\,\mathscr{G})] = \mathbb{E}[\,\mathbf{1}_A\,\mathbb{E}(\eta\,|\,\mathscr{G})]$ qui est positive car par hypothèse, $\mathbb{E}(\eta\,|\,\mathscr{G}) \geq 0$ p.s.

"$\Leftarrow$" Supposons que $\mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_A) \geq 0$, $\forall A \in \mathscr{G}$.

Posons $\theta := \mathbb{E}(\eta\,|\,\mathscr{G})$ qui est une variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable. Soit $B := \{\omega : \theta(\omega) < 0\} \in \mathscr{G}$. Par hypothèse, $\mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_B) \geq 0$. Or, $\mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_B) = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_B\,|\,\mathscr{G})] = \mathbb{E}[\,\mathbf{1}_B\,\mathbb{E}(\eta\,|\,\mathscr{G})] = \mathbb{E}[\,\mathbf{1}_B\,\theta]$; donc dire $\mathbb{E}(\eta\,\mathbf{1}_B) \geq 0$ équivaut à dire $\mathbb{E}[\,\mathbf{1}_B\,\theta] \geq 0$. Comme $\mathbf{1}_B\,\theta \leq 0$, ceci n'est possible que si $\mathbf{1}_B\,\theta = 0$ p.s., c'est-à-dire, $\theta \geq 0$ p.s.

(ii) C'est une conséquence de (i), en considérant les deux couples $(\xi,\,\eta)$ et $(-\xi,\,-\eta)$. $\square$

Exercice 7. "$\Rightarrow$" Supposons que $(X_\alpha,\,\alpha \in A)$ est uniformément intégrable.

Soit $a > 0$ un réel. On a, pour tout $B \in \mathscr{F}$, $\mathbb{E}(|X_\alpha|\,\mathbf{1}_B) \leq \mathbb{E}(|X_\alpha|\,\mathbf{1}_{\{|X_\alpha| \geq a\}}) + a\,\mathbb{P}(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On fixe a suffisamment grand tel que $\mathbb{E}(|X_\alpha|\,\mathbf{1}_{\{|X_\alpha| \geq a\}}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $\alpha \in A$. En prenant $B := \Omega$, on obtient (i), tandis qu'en prenant $\delta := \frac{\varepsilon}{2a}$, on obtient (ii).

"$\Leftarrow$" Supposons (i) et (ii). Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ dans (ii). Pour tout $a \geq \frac{1}{\delta}\sup_{\alpha \in A}\mathbb{E}(|X_\alpha|)$, comme $\mathbb{P}(|X_\alpha| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_\alpha|)}{a} \leq \delta$, on a, d'après (ii), $\mathbb{E}(|X_\alpha|\,\mathbf{1}_{\{|X_\alpha| \geq a\}}) \leq \varepsilon$, $\forall \alpha \in A$. $\square$

Exercice 8. Soit $X_{\mathscr{G}} := \mathbb{E}(\xi\,|\,\mathscr{G})$ pour toute sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$.

Soit $a > 0$. Comme $\{|X_{\mathscr{G}}| \geq a\} \in \mathscr{G}$, on a $\mathbb{E}(|\xi|\,\mathbf{1}_{\{|X_{\mathscr{G}}| \geq a\}}) = \mathbb{E}(|X_{\mathscr{G}}|\,\mathbf{1}_{\{|X_{\mathscr{G}}| \geq a\}})$. Soit $\varepsilon > 0$. L'intégrabilité de ξ implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $B \in \mathscr{F}$ avec $\mathbb{P}(B) \leq \delta$, on a $\mathbb{E}(|\xi|\,\mathbf{1}_B) < \varepsilon$.

Si $a \geq \frac{\mathbb{E}(|\xi|)}{\delta}$, alors $\mathbb{P}\{|X_{\mathscr{G}}| \geq a\} \leq \frac{\mathbb{E}(|X_{\mathscr{G}}|)}{a} \leq \frac{\mathbb{E}(|\xi|)}{a} \leq \delta$, et donc par le paragraphe précédent, $\mathbb{E}(|X_{\mathscr{G}}|\,\mathbf{1}_{\{|X_{\mathscr{G}}| \geq a\}}) < \varepsilon$. Autrement dit, $(\mathbb{E}(\xi\,|\,\mathscr{G}),\ \mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ sous-tribu$)$ est uniformément intégrable. $\square$

Exercice 9. Théorème de de la Vallée Poussin. Cf poly “compléments de proba” (sur ma page), page 36.

Exercice 10. Découle immédiatement du 9, en utilisant Jensen.

Exercice 11. Cas particulier du 9.

Exercice 12. Découle facilement du 8.

Exercice 13. Sans perte de généralité, on peut supposer que $X_\infty = 0$, car sinon, il suffit de considérer $X_t - X_\infty$ à la place de X_t en constatant que $(X_t - X_\infty,\, t \geq 0)$ est également uniformément intégrable (d'après l'Exercice 12).

Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $a > 0$ suffisamment grand tel que $\mathbb{E}(|X_t| \, \mathbf{1}_{\{|X_t|>a\}}) < \varepsilon$, $\forall t \geq 0$. On a alors $\mathbb{E}(|X_t|) = \mathbb{E}(|X_t| \, \mathbf{1}_{\{\varepsilon \leq |X_t| \leq a\}}) + \mathbb{E}(|X_t| \, \mathbf{1}_{\{|X_t|>a\}}) + \mathbb{E}(|X_t| \, \mathbf{1}_{\{|X_t|<\varepsilon\}}) \leq a\mathbb{P}(|X_t| \geq \varepsilon) + \varepsilon + \varepsilon$. En faisant $t \to \infty$, et vu que $X_t \to 0$ en probabilité, on obtient $\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}(|X_t|) \leq 2\varepsilon$, ce qui donne $X_t \to 0$ dans L^1 car $\varepsilon > 0$ peut être aussi petit qu'on veut. $\square$

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.
Feuille 1.
Solutions

Exercice 1. On utilise un argument par récurrence. Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons que ce soit vrai au rang $n-1$. Il est clair que $(X_n(\frac{k}{2^n}),\, 0 \le k \le 2^n)$ est un vecteur gaussien (et évidemment centré), étant fonction linéaire des vecteurs gaussiens $(X_{n-1}(\frac{k}{2^{n-1}}),\, 0 \le k \le 2^{n-1})$ et $(\xi_{k,n},\, 0 \le k \le 2^n)$ qui sont indépendants. Il reste de vérifier la covariance. On distingue maintenant deux situations possibles.

Supposons qu'il y a au moins un nombre pair parmi k et ℓ, disons $k = 2k_1$: alors $X_n(\frac{k}{2^n}) = X_{n-1}(\frac{k_1}{2^{n-1}})$, et l'identité cherchée $\mathrm{Cov}(X_{n-1}(\frac{k}{2^n}),\, X_{n-1}(\frac{\ell}{2^n})) = \frac{k}{2^n} \wedge \frac{\ell}{2^n}$ est triviale par hypothèse de récurrence si ℓ est pair ; si ℓ est impair, disons $\ell = 2\ell_1 + 1$, alors $X_n(\frac{\ell}{2^n}) = \frac{1}{2}X_{n-1}(\frac{\ell_1}{2^{n-1}}) + \frac{1}{2}X_{n-1}(\frac{\ell_1+1}{2^{n-1}}) + \frac{\xi_{\ell,n}}{2^{(n+1)/2}}$; comme $\xi_{\ell,n}$ est indépendante de $X_{n-1}(\frac{k_1}{2^{n-1}})$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}\Big(X_n(\frac{k}{2^n}),\, X_n(\frac{\ell}{2^n})\Big)\\
=\ & \frac{1}{2}\mathrm{Cov}\Big(X_{n-1}(\frac{k_1}{2^{n-1}}),\, X_{n-1}(\frac{\ell_1}{2^{n-1}})\Big) + \frac{1}{2}\mathrm{Cov}\Big(X_{n-1}(\frac{k_1}{2^{n-1}}),\, X_{n-1}(\frac{\ell_1+1}{2^{n-1}})\Big),
\end{aligned}$$

ce qui, par hypothèse de récurrence, vaut $\frac{1}{2}(\frac{k_1}{2^{n-1}} \wedge \frac{\ell_1}{2^{n-1}}) + \frac{1}{2}(\frac{k_1}{2^{n-1}} \wedge \frac{\ell_1+1}{2^{n-1}}) = \frac{k}{2^n} \wedge \frac{\ell}{2^n}$ comme prévu.

Supposons ensuite que k et ℓ sont tous impairs, disons $k = 2k_1 + 1$ et $\ell = 2\ell_1 + 1$: on a $X_n(\frac{k}{2^n}) = \frac{1}{2}X_{n-1}(\frac{k_1}{2^{n-1}}) + \frac{1}{2}X_{n-1}(\frac{k_1+1}{2^{n-1}}) + \frac{\xi_{k,n}}{2^{(n+1)/2}}$ et $X_n(\frac{\ell}{2^n}) = \frac{1}{2}X_{n-1}(\frac{\ell_1}{2^{n-1}}) + \frac{1}{2}X_{n-1}(\frac{\ell_1+1}{2^{n-1}}) + \frac{\xi_{\ell,n}}{2^{(n+1)/2}}$. Comme $\xi_{k,n}$ et $\xi_{\ell,n}$ sont indépendantes de $(X_{n-1}(t),\, t \in [0,\, 1])$, on a, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\Big(X_n(\frac{k}{2^n}),\, X_n(\frac{\ell}{2^n})\Big) \ =\ & \frac{1}{4}(\frac{k_1}{2^{n-1}} \wedge \frac{\ell_1}{2^{n-1}}) + \frac{1}{4}(\frac{k_1}{2^{n-1}} \wedge \frac{\ell_1+1}{2^{n-1}}) + \\
& + \frac{1}{4}(\frac{k_1+1}{2^{n-1}} \wedge \frac{\ell_1}{2^{n-1}}) + \frac{1}{4}(\frac{k_1+1}{2^{n-1}} \wedge \frac{\ell_1+1}{2^{n-1}}) + \frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{Cov}(\xi_{k,n},\, \xi_{\ell,n}).
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que la somme des cinq termes à droite vaut effectivement $\frac{k}{2^n} \wedge \frac{\ell}{2^n}$.

Un raisonnement par récurrent permet alors de conclure que $\mathrm{Cov}[X_n(\frac{k}{2^n})X_n(\frac{\ell}{2^n})] = \frac{k}{2^n} \wedge \frac{\ell}{2^n}$. □

Exercice 2. Il est clair que les trajectoires de B sont p.s. continues. On vérifie ensuite facilement que B est un processus gaussien centré de covariance $\mathrm{Cov}(B_t,\, B_s) = t \wedge s$ pour tous réels positifs s et t. □

Exercice 3. Pour tout $t \geq 0$, X_t est continue, donc mesurable par rapport à $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Par conséquent, $\sigma(X_t,\, t \geq 0) \subset \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Inversement, pour tout $\mathrm{w}_0 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\delta_n(\mathrm{w}, \mathrm{w}_0) = \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |\mathrm{w}(t) - \mathrm{w}_0(t)|$ est $\sigma(X_t,\, t \geq 0)$-mesurable, ainsi que $d(\mathrm{w}, \mathrm{w}_0)$. Soit maintenant F un ensemble fermé quelconque de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, et soient (w_n) une suite dense de F (car on est dans un espace séparable), et on a alors

$$F = \{\mathrm{w} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) :\, d(\mathrm{w}, F) = 0\} = \{\mathrm{w} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) :\, \inf_n d(\mathrm{w}, \mathrm{w}_n) = 0\},$$

qui est un élément de $\sigma(X_t,\, t \geq 0)$. Par conséquent, $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \subset \sigma(X_t,\, t \geq 0)$.

On peut également montrer directment que les ouverts sont $\sigma(X_t,\, t \geq 0)$-mesurables en utilisant la propriété[1] suivante : si un espace métrique est séparable, alors tout ouvert est la réunion dénombrable de boules ouvertes. □

Exercice 4. Soit $t > 0$. On a $\mathbb{P}(T < \infty) \geq \mathbb{P}(T \leq t) \geq \mathbb{P}(B_t \geq 1)$. Comme $\mathbb{P}(B_t \geq 1) \to \frac{1}{2}$ lorsque $t \to \infty$, on obtient $\mathbb{P}(T < \infty) \geq \frac{1}{2}$. □

Exercice 5. Par définition, ξ est la limite p.s. de $\xi_n := 2^n \sum_{i=1}^{2^n} B_{i/2^n}$ et a fortiori la limite en loi. Pour chaque n, ξ_n suit une loi gaussienne (car le mouvement brownien est un processus gaussien), on sait, grâce à l'Exercice 4, que ξ suit une loi gaussienne, avec $\mathbb{E}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\xi_n)$ et $\mathrm{Var}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\xi_n)$.

Comme $\mathbb{E}(\xi_n) = 0$, $\forall n$, on a $\mathbb{E}(\xi) = 0$.

Comme $\mathrm{Var}(\xi_n) = 2^{2n} \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} (\frac{i}{2^n} \wedge \frac{j}{2^n}) \to \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}$, on a $\mathrm{Var}(\xi) = \frac{1}{3}$.

Conclusion : ξ suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\, \frac{1}{3})$. □

Exercice 6. Soient a et b des réels quelconques. Exactement comme dans l'exercice précédent, on voit que $aB_1 + b\eta$ suit une loi gaussienne ; autrement dit, $(B_1,\, \eta)$ est un vecteur gaussien, centré. De plus, $\mathbb{E}(B_1) = 0 = \mathbb{E}(\eta)$, $\mathbb{E}(B_1^2) = 1$, $\mathbb{E}(\eta^2) = \frac{8}{3}$, et $\mathbb{E}(B_1\eta)$ est, par Fubini (pourquoi ?), $= \int_0^2 \mathbb{E}(B_1 B_t)\, \mathrm{d}t = \int_0^2 (1 \wedge t)\, \mathrm{d}t = \frac{3}{2}$. Donc $(B_1,\, \eta)$ suit la loi gaussienne bi-dimensionnelle $\mathscr{N}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 8/3 \end{pmatrix})$.

En particulier, $\mathbb{E}(B_1 \,|\, \eta) = \frac{\mathbb{E}(B_1\eta)}{\mathbb{E}(\eta^2)}\, \eta = \frac{9}{16}\, \eta$. □

Exercice 7. Soit $n \geq 1$, et soit $(s_1,\, \cdots,\, s_n) \in [0,\, 1]^n$. Le mouvement brownien B étant un processus gaussien centré, le vecteur aléatoire $(B_7 - B_2,\, B_{s_1},\, \cdots,\, B_{s_n})$ est gaussien

[1] Soit G un ouvert, et soit D un ensemble dénombrable dense de l'espace, alors pour tout $x \in G$, il existe $x_D \in D$ et $n_x \geq 1$ suffisamment grand tels que $x \in B(x_D,\, \frac{1}{n_x}) \subset G$. Donc $G = \cup_{x\in G} B(x_D,\, \frac{1}{n_x})$; la famille $\{B(x_D,\, \frac{1}{n_x}),\, x \in G\}$ est dénombrable, étant une sous-famille de $\{B(x,\, \frac{1}{n}),\, x \in D,\, n \geq 1\}$.

centré. Comme $\mathrm{Cov}(B_7 - B_2,\, B_{s_i}) = \mathrm{Cov}(B_7,\, B_{s_i}) - \mathrm{Cov}(B_2,\, B_{s_i}) = s_i - s_i = 0$ pour tout $i \le n$, une propriété importante (laquelle ?) des vecteurs gaussiens nous dit que $B_7 - B_2$ est indépendante de $(B_{s_1},\, \cdots,\, B_{s_n})$. Un argument de classe monotone permet alors de conclure que $B_7 - B_2$ est indépendante de $\sigma(B_s,\, s \in [0,\, 1])$. $\square$

Exercice 8. Comme dans l'exercice précédent, on voit que $B_5 - B_1$ est indépendante de la tribu $\mathscr{F}_1$. En particulier, $\mathbb{E}(B_5 \,|\, \mathscr{F}_1) = \mathbb{E}(B_5 - B_1 \,|\, \mathscr{F}_1) + \mathbb{E}(B_1 \,|\, \mathscr{F}_1) = \mathbb{E}(B_5 - B_1) + B_1 = B_1$, et $\mathbb{E}(B_5^2 \,|\, \mathscr{F}_1) = \mathbb{E}((B_5 - B_1)^2 \,|\, \mathscr{F}_1) + 2B_1 \mathbb{E}(B_5 \,|\, \mathscr{F}_1) - B_1^2 = \mathbb{E}((B_5 - B_1)^2) + 2B_1^2 - B_1^2 = 4 + B_1^2$. $\square$

Exercice 9. (i) Il suffit d'appliquer la propriété de scaling.

(ii) Les trajectoires du second processus sont p.s. de classe C^∞, tandis que celles du premier ne sont p.s. pas de classe C^2. $\square$

Exercice 10. La mesurabilité de B_T est claire si l'on se met dans l'espace canonique du mouvement brownien. Calculons sa loi en étudiant sa fonction caractéristique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{ixB_T} \,|\, T] = \mathrm{e}^{-x^2 T/2}$, donc $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{ixB_T}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-x^2 T/2}] = \frac{2}{2+x^2}$. Autrement dit, B_T a pour densité $(1/\sqrt{2}\,)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,|x|}$ ("loi exponentielle bilatérale" de paramètre $\sqrt{2}\,$). $\square$

Exercice 11. Par Fubini–Tonelli, $\mathbb{E}(\int_0^1 |\frac{B_s}{s}|\,\mathrm{d}s) = \int_0^1 \mathbb{E}(\,|\frac{B_s}{s}|\,)\,\mathrm{d}s = c\int_0^1 s^{-1/2}\,\mathrm{d}s < \infty$, où $c := \mathbb{E}(|B_1|) < \infty$. A fortiori, $\int_0^1 |\frac{B_s}{s}|\,\mathrm{d}s < \infty$ p.s. Par conséquent, $\int_0^1 \frac{B_s}{s}\,\mathrm{d}s$ est bien définie p.s.

[On peut, bien sûr, directement prouver que $\int_0^1 \frac{B_s}{s}\,\mathrm{d}s$ est p.s. bien définie à l'aide de la continuité höldérienne de B.] $\square$

Exercice 12. Comme dans l'exercice précédent, on voit que pour tout $t > 0$, $X_t := \int_0^t \frac{B_s}{s}\,\mathrm{d}s$ est bien définie p.s. Donc, p.s., le processus $(X_t,\, t \ge 0)$ est défini (pourquoi ?) et à trajectoires continues, ainsi que le processus $(\beta_t := B_t - X_t,\, t \ge 0)$.

Comme dans l'Exercice 5, on voit que pour tout n et tous réels $a_1,\, \cdots,\, a_n$, $\sum_{i=1}^n a_i \beta_{t_i}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée. Par conséquent, β est un processus gaussien centré.

Il reste de vérifier la covariance. Soient $t \ge s > 0$. On a $\mathbb{E}(X_t B_s) = s + s\log\frac{t}{s}$ (pourquoi ?), $\mathbb{E}(X_s B_t) = s$ et $\mathbb{E}(X_s X_t) = 2s + s\log\frac{t}{s}$. Donc $\mathbb{E}(\beta_t \beta_s) = \mathbb{E}(B_t B_s) - \mathbb{E}(X_t B_s) - \mathbb{E}(X_s B_t) + \mathbb{E}(X_t X_s) = s$ comme prévu. En conclusion, β est un mouvement brownien. $\square$

Exercice 13. Soit $X_t := \int_0^t |B_s|\,\mathrm{d}s$, $t \ge 0$. Par scaling, pour tout $t > 0$, X_t a la même loi que $t^{3/2} X_1$ (comme dans l'un des exercices précédents). Pour tout $x > 0$, on a $\mathbb{P}\{X_\infty \ge$

$x\} \geq \mathbb{P}\{X_t \geq x\} = \mathbb{P}\{X_1 \geq \frac{x}{t^{3/2}}\}$ qui tend vers $\mathbb{P}\{X_1 > 0\} = 1$ lorsque $t \to \infty$, car $X_1 > 0$ p.s. Ceci étant vrai pour tout $x > 0$, on a $X_\infty = \infty$ p.s. $\square$

Exercice 14. **(i)** On écrit

$$B_t - B_s = \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_s) + \frac{1-t}{1-s}\,(B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_t).$$

Il est clair que $\frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_s)$ est $\mathscr{G}_s$-mesurable. Montrons que $X := \frac{1-t}{1-s}\,(B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_t)$ est indépendante de $\mathscr{G}_s$. Par classe monotone, il suffit de montrer que pour tout n et tous $0 \leq s_1 < \cdots < s_n \leq s$, X est indépendante de $(B_{s_1}, \cdots, B_{s_n}, B_1)$.

Or, $(X, B_{s_1}, \cdots, B_{s_n}, B_1)$ étant un vecteur gaussien, il suffit de vérifier que $\mathrm{Cov}(X, B_{s_i}) = \mathrm{Cov}(X, B_1) = 0$, $\forall i$. Il est clair que $\mathrm{Cov}(X, B_{s_i}) = 0$ car X est indépendante de B_{s_i} (propriété de Markov simple), tandis que $\mathrm{Cov}(X, B_1) = \frac{1-t}{1-s}\,(t-s) - \frac{t-s}{1-s}\,(1-t) = 0$.

Donc X est indépendante de $\mathscr{G}_s$: on a alors $\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}_s] = \mathbb{E}[X] = 0$. Par conséquent, $\mathbb{E}[(B_t - B_s) \,|\, \mathscr{G}_s] = \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_s)$.

(ii) [L'intégrale $\int_0^1 \frac{B_1 - B_s}{1-s}\,\mathrm{d}s$ est p.s. bien définie car le mouvement brownien est localement höldérienne d'exposant $\frac{1}{2} - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$.]

Soient $1 \geq t > s \geq 0$. D'après (i), on a $\mathbb{E}[B_t \,|\, \mathscr{G}_s] = B_s + \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_s)$, et $\mathbb{E}[(B_1 - B_u) \,|\, \mathscr{G}_s] = B_1 - B_s - \frac{u-s}{1-s}\,(B_1 - B_s) = \frac{1-u}{1-s}\,(B_1 - B_s)$ pour $u \geq s$. Par le théorème de Fubini qui se justifie ici assez facilement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\beta_t \,|\, \mathscr{G}_s] &= \mathbb{E}[B_t \,|\, \mathscr{G}_s] - \int_s^t \frac{\mathbb{E}[(B_1 - B_u) \,|\, \mathscr{G}_s]}{1-u}\,\mathrm{d}u - \int_0^s \frac{B_1 - B_u}{1-u}\,\mathrm{d}u \\
&= B_s + \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_s) - \int_s^t \frac{1}{1-u}\,\frac{1-u}{1-s}\,(B_1 - B_s)\,\mathrm{d}u - \int_0^s \frac{B_1 - B_u}{1-u}\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

qui n'est autre que β_s. $\square$

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.
Feuille 2.
Solutions

Exercice 1. **(i)** Soit $t \geq 0$. On vérifie que $\{d_1 \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.

Si $t < 1$, alors $\{d_1 \leq t\} = \varnothing \in \mathscr{F}_t$. Si $t \geq 1$, on a

$$\{d_1 \leq t\} = \Big\{ \inf_{s \in [1,t] \cap \mathbb{Q}} |B_s| = 0 \Big\} \in \mathscr{F}_t.$$

Par conséquent, d_1 est un temps d'arrêt.

(ii) Soit $t \geq 1$. Par la propriété de Markov en temps 1,

$$\mathbb{P}\{d_1 \leq t\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\{B_1 \in \, \mathrm{d}x\} \, \mathbb{P}\{T_{-x} \leq t-1\}.$$

Soient N et $\widetilde{N}$ deux variables gaussiennes centrées réduites indépendantes. On a vu dans le cours que T_{-x} a la même loi que x^2/N^2. Donc

$$\mathbb{P}\{d_1 \leq t\} = \mathbb{P}\Big(\frac{\widetilde{N}^2}{N^2} \leq t-1 \Big).$$

Par conséquent, $\sqrt{d_1 - 1}$ a la même loi que le module d'une variable de Cauchy standard. En d'autres mots,

$$\mathbb{P}(d_1 \in \, \mathrm{d}t) = \frac{1}{\pi} \, \frac{\mathbf{1}_{\{t>1\}}}{t\sqrt{t-1}} \, \mathrm{d}t.$$

On s'intéresse maintenant à la loi de g_1. Pour tout $t \in [0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(g_1 \leq t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\{B_t \in \, \mathrm{d}x\} \, \mathbb{P}\{T_{-x} > 1-t\} \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{t\widetilde{N}^2}{N^2} > 1-t \Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{1+(\widetilde{N}/N)^2} < t \Big). \end{aligned}$$

Donc g_1 a la même loi que $1/(1+C^2)$, où C est une variable de Cauchy standard. On a

$$\mathbb{P}(g_1 \in \, \mathrm{d}t) = \frac{1}{\pi} \, \frac{\mathbf{1}_{\{0<t<1\}}}{\sqrt{t(1-t)}} \, \mathrm{d}t.$$

On dit que g_1 suit la loi de l'arc sinus, car $\mathbb{P}(g_1 \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}\,)$.

Remarquons que l'on aurait pu déterminer la loi de g_1 à l'aide de celle de d_1 et de la propriété de scaling, car $\{g_1 < t\} = \{d_t > 1\}$, où $d_t := \inf\{s \geq t : B_s = 0\}$ a la même loi que td_1. $\square$

Exercice 2. **(i)** On montre que pour tout $T \geq 0$ temps d'arrêt fini, $\tau = \inf\{t \geq T : B_t = 0\}$ est un temps d'arrêt. On l'a démontré dans l'exercice précédent lorsque T est un temps constant. Si T prend un nombre au plus dénombrable de valeurs, disons (t_n), alors

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{n:\, t_n \leq t} \{T = t_n\} \cap \Big\{ \inf_{s \in [t_n, t] \cap \mathbb{Q}} |B_s| = 0 \Big\} \in \mathscr{F}_t.$$

Donc τ est un temps d'arrêt.

Dans le cas général, pour tout n, soit

$$T_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} \mathbf{1}_{\{k/2^n < T \leq (k+1)/2^n\}},$$

qui est une suite de temps d'arrêt qui décroît vers T. D'après ce que l'on vient de démontrer, $\tau_n := \inf\{t \geq T_n : B_t = 0\}$ est un temps d'arrêt. Donc

$$\{\tau \leq t\} = \Big(\{T \leq t\} \cap \{B_T = 0\}\Big) \cup \Big(\{T \leq t\} \cap \{B_T \neq 0\} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n \leq t\}\Big),$$

est un élément de $\mathscr{F}_t$. En conclusion, τ est un temps d'arrêt.

(ii) Par la propriété de Markov forte, τ a la même loi que $T_1 + \widetilde{T}_{-1}$, où $\widetilde{T}_{-1}$ est une copie indépendante de T_1. Donc τ a la loi de T_2, ou encore celle de $4T_1$. La densité de τ est

$$\mathbb{P}(\tau \in \,\mathrm{d}t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \exp\Big(-\frac{2}{t}\Big) \,\mathrm{d}t,$$

pour $t > 0$. $\square$

Exercice 3. **(i)** Par scaling, pour tout $t \geq 0$ fixé, $\log(1+B_t^2)$ a la même loi que $\log(1+tB_1^2)$. Or, $B_1 \neq 0$ p.s., on a $\frac{\log(1+tB_1^2)}{\log t} \to 1$ p.s. D'où : $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t} \to 1$ en loi. La limite étant une constante, la convergence a lieu également en probabilité. Conclusion : $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t} \to 1$ en probabilité.

(ii) Si $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$ convergeait p.s., alors elle convergerait p.s. vers 1. Or, $\{t : B_t = 0\}$ est p.s. non borné, cequi rend impossible la convergence p.s. vers 1. Conclusion : $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$ ne converge pas au sens p.s. $\square$

Exercice 4. **(i)** Par la propriété de Markov, $\sup_{t\in[c,d]} B_s - B_c$ est indépendante de $(B_c, \sup_{t\in[a,b]} B_s)$, et a pour loi $\sqrt{d-c}\,|N|$. Comme $\mathbb{P}(N = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient le résultat cherché.

(ii) D'après la question précédente, p.s., pour tous les rationnels positifs $a < b < c < d$, $\sup_{t\in[a,b]} B_s \neq \sup_{t\in[c,d]} B_s$. Si B avait un maximum local non-strict, alors on pourrait trouver deux intervalles fermés disjoints dont les points d'extrémité sont tous des rationnels, sur lesquels B a les mêmes maxima, ce qui serait absurde.

Exercice 5. Par scaling, pour chaque t fixé, $(\int_0^t \mathrm{e}^{B_s}\,\mathrm{d}s)^{1/t^{1/2}}$ a la même loi que

$$\Big(t\int_0^1 \mathrm{e}^{t^{1/2}B_u}\,\mathrm{d}u\Big)^{1/t^{1/2}} = \exp\Big(\frac{\log t}{t^{1/2}} + \frac{1}{t^{1/2}}\log\int_0^1 \mathrm{e}^{t^{1/2}B_u}\,\mathrm{d}u\Big).$$

La continuité de B implique que $\frac{1}{t^{1/2}}\log\int_0^1 \mathrm{e}^{t^{1/2}B_u}\,\mathrm{d}u \to \sup_{u\in[0,1]} B_u$ p.s., et donc $\exp(\frac{\log t}{t^{1/2}} + \frac{1}{t^{1/2}}\log\int_0^1 \mathrm{e}^{t^{1/2}B_u}\,\mathrm{d}u) \to \exp(\sup_{u\in[0,1]} B_u)$ p.s. Par conséquent, $(\int_0^t \mathrm{e}^{B_s}\,\mathrm{d}s)^{1/t^{1/2}}$ converge en loi vers $\exp(\sup_{u\in[0,1]} B_u)$; cette dernière variable aléatoire a pour loi celle de $\mathrm{e}^{|N|}$ (d'après le principe de réflexion). $\square$

Exercice 6. **(i)** Soit $\lambda > 0$. On a $\mathbb{P}(T_a \le t) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^{-\lambda T_a} \ge \mathrm{e}^{-\lambda t}) \le \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_a}) = \mathrm{e}^{\lambda t - a\sqrt{2\lambda}}$.

On choisissant $\lambda := \frac{a^2}{2t^2}$, on obtient l'inégalité cherchée.

(ii) Soit $S_1 := \sup_{s\in[0,\,1]} B_s$. D'après (i), on a, pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(S_1 \ge a) = \mathbb{P}(T_a \le 1) \le \mathrm{e}^{-a^2/2}$. D'après le principe de réflexion, S_1 suit la loi du module de la gaussienne centrée réduite ; d'où l'inégalité désirée. $\square$

Exercice 7. Soit $\beta_s := B_{s+1} - B_1$, $s \ge 0$. D'après la propriété de Markov, β est un mouvement brownien, indépendant de $\mathscr{F}_1$, donc de (S_1, B_1).

On écrit $\widetilde{S}_t := \sup_{s\in[0,t]} \beta_s$. Alors $\sup_{s\in[1,2]} B_s = \widetilde{S}_1 + B_1$, et donc $S_2 = \max\{S_1,\, \widetilde{S}_1 + B_1\}$. Autrement dit, $S_2 - S_1 = \max\{0,\, \widetilde{S}_1 - (S_1 - B_1)\}$. Rappelons que $\widetilde{S}_1$ et $S_1 - B_1$ sont indépendantes (voir paragraphe précédent), et que d'après le principe de réflexion, elles ont toutes deux la même loi que $|B_1|$. $\square$

Exercice 8. La loi des grands nombres forte nous dit que $\frac{B_n}{n} \to 0$ p.s. quand $n \to \infty$. Il suffira donc de vérifier que $\frac{1}{n}\sup_{t\in[n,\,n+1]} |B_t - B_n| \to 0$ p.s.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $A_n := \{\sup_{t\in[n,\,n+1]} |B_t - B_n| > n^\varepsilon\}$. On a $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,\,1]} |B_s| > n^\varepsilon) \le 2\,\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,\,1]} B_s > n^\varepsilon)$. Par le principe de réflexion, $\sup_{s\in[0,\,1]} B_s$ a la même loi que $|B_1|$. D'où $\mathbb{P}(A_n) \le 2\,\mathbb{P}(|B_1| > n^\varepsilon) = 4\,\mathbb{P}(B_1 > n^\varepsilon) \le 2\,\exp(-\frac{n^{2\varepsilon}}{2})$, ce qui implique que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Par le lemme de Borel–Cantelli, $\limsup_{n\to\infty} n^{-\varepsilon}\sup_{t\in[n,\,n+1]} |B_t - B_n| \le 1$ p.s. A fortiori, $\frac{1}{n}\sup_{t\in[n,\,n+1]} |B_t - B_n| \to 0$ p.s. $\square$

Exercice 9. L'argument de Pierre est faux, car T n'est pas $\mathscr{F}_{0+}$-mesurable. En effet, quel que soit $t > 0$, T n'est pas $\mathscr{F}_t$-mesurable.

Pour prouver que $T < \infty$ p.s., il suffit de rappeler que $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{t^{1/2}} = \infty$ p.s. $\square$

Exercice 10. On définit deux suites de temps d'arrêt $(\tau_i)_{i\geq 1}$ et $(T_i)_{i\geq 1}$ par récurrence : $\tau_1 := 0$, $T_i := \inf\{t > \tau_i : |B_t| = 1\}$ et $\tau_{i+1} := \inf\{t > T_i : B_t = 0\}$ pour $i \geq 1$. La propriété de Markov forte dit que $\int_{\tau_i}^{T_i} \sin^2(B_t)\,\mathrm{d}t$, $i \geq 1$, sont des variables aléatoires i.i.d. En particulier, $\sum_{i\geq 1}\int_{\tau_i}^{T_i} \sin^2(B_t)\,\mathrm{d}t = \infty$ p.s. A fortiori, $\int_0^\infty B_t^2\,\mathrm{d}t \geq \sum_{i\geq 1}\int_{\tau_i}^{T_i} \sin^2(B_t)\,\mathrm{d}t = \infty$ p.s. $\square$

Exercice 11.

(i) On introduit les temps de passage successifs par $\mathbb{Z}$, i.e. $\tau_0 = 0$ et $\tau_{n+1} = \inf\{t \geq \tau_n : |B_t - B_{\tau_n}| = 1\}$. Par Markov forte, les $\tau_{n+1} - \tau_n$ sont i.i.d., et il est clair qu'il existe $p > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\mathbb{P}(\tau_1 > \alpha, B_{\tau_1} = 1) = \mathbb{P}(\tau_1 > \alpha, B_{\tau_1} = -1) = p.$$

On écrit

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\Big(\sup_{[0,t]} |B_s| \leq 2\Big) \\ \geq\ &\mathbb{P}(\tau_1 > \alpha, B_{\tau_1} = 1 \text{ puis } \tau_2 - \tau_1 > \alpha, B_{\tau_2} = 0 \text{ puis } \tau_3 - \tau_2 > \alpha, B_{\tau_3} = 1 \dots) \end{aligned}$$

jusqu'à un indice $k = \lfloor t/\alpha \rfloor + 1$. Donc, par Markov forte, $\mathbb{P}(\sup_{[0,t]} |B_s| \leq 2) \geq p^k \geq p^{t/\alpha + 1}$, ce qui permet de conclure.

(ii) Découle du (i) par scaling.

(iii) Evident.

Exercice 12. (i) Soit $A_n := \{S_{t_{n+1}} \geq (1+\varepsilon)h(t_n)\}$. On a

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\Big(|B_1| \geq \sqrt{2(1+\varepsilon)\log\log t_n}\Big) \leq 2\exp\Big(-(1+\varepsilon)\log\log t_n\Big),$$

car $\mathbb{P}(N \geq x) \leq \mathrm{e}^{-x^2/2}$ pour tout $x \geq 0$. On voit que $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Par le lemme de Borel–Cantelli, il existe A avec $\mathbb{P}(A) = 1$ tel que pour tout $\omega \in A$, $\exists\, n_0 = n_0(\omega) < \infty$,

$$n \geq n_0 \implies S_{t_{n+1}} < (1+\varepsilon)\sqrt{2t_n \log\log t_n}.$$

Donc si $t \in [t_n, t_{n+1}]$, alors

$$S_t \leq S_{t_{n+1}} < (1+\varepsilon)\sqrt{2t_n\log\log t_n} \leq (1+\varepsilon)\sqrt{2t\log\log t},$$

ce qui implique $\limsup_{t\to\infty} \frac{S_t}{h(t)} \le 1+\varepsilon$, p.s. Il suffit de faire $\varepsilon \to 0$ le long d'une suite de rationnels pour conclure.

(ii) On sait que $-B$ est également un mouvement brownien standard. D'après (i), $\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]}(-B_s)}{h(t)} \le 1$, p.s. D'où le résultat cherché.

(iii) Soit $E_n := \{B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha h(s_n)\}$. Les (E_n) sont indépendants. En plus,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}\Big(B_1 > \alpha\sqrt{\frac{2\log\log s_n}{1-\theta^{-1}}}\Big) \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha\sqrt{2(\log\log s_n)/(1-\theta^{-1})}}\exp\Big(-\frac{\alpha^2\log\log s_n}{1-\theta^{-1}}\Big),
\end{aligned}
$$

ce qui donne $\sum_n \mathbb{P}(E_n) = \infty$, car $\alpha < \sqrt{1-\theta^{-1}}$. Donc, il existe E avec $\mathbb{P}(E) = 1$ tel que pour tout $\omega \in E$,

$$B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha\sqrt{2s_n \log\log s_n}, \qquad \text{pour une infinité de } n.$$

D'autre part, d'après (ii), presque sûrement pour tout n grand,

$$|B_{s_{n-1}}| \le 2\sqrt{2s_{n-1}\log\log s_{n-1}} \le \frac{2}{\sqrt{\theta}}\sqrt{2s_n\log\log s_n}\,.$$

D'où l'inégalité désirée.

(iv) Par (iii), $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} \ge 1$ p.s., ce qui, vu (i), implique le résultat.

(v) L'expression "limsup" vaut 1 p.s., pour tout i.

(vi) Par symétrie, $\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} = -1$ p.s.

Par inversion du temps, $\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{(2t\log\log(1/t))^{1/2}} = 1$ p.s.

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.
Feuille 3.
Solutions

Exercice 1 (i) Soit $A \in \mathscr{F}_\sigma$. Alors $A \cap \{\tau \le t\} = (A \cap \{\sigma \le t\}) \cap \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$.

(ii) On a $\{\sigma \wedge \tau \le t\} = \{\sigma \le t\} \cup \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$ et $\{\sigma \vee \tau \le t\} = \{\sigma \le t\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$.

D'après (i), $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$. Réciproquement, si $A \in \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$, alors

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \le t\} = (A \cap \{\sigma \le t\}) \cup (A \cap \{\tau \le t\}) \in \mathscr{F}_t,$$

et donc $A \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$. Par conséquent, $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$.

Enfin, $\{\sigma \le \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma \le t\} \cap \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \wedge t \le \tau \wedge t\} \in \mathscr{F}_t$, car $\sigma \wedge t$ et $\tau \wedge t$ étant $\mathscr{F}_{\sigma\wedge t}$-mesurable et $\mathscr{F}_{\tau\wedge t}$-mesurable respectivement, sont $\mathscr{F}_t$-mesurables. Donc $\{\sigma \le \tau\}$ est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable. De même, $\{\sigma \le \tau\} \cap \{\sigma \le t\} = \{\sigma \le t\} \cap \{\sigma \wedge t \le \tau \wedge t\} \in \mathscr{F}_t$, ce qui donne $\{\sigma \le \tau\} \in \mathscr{F}_\sigma$. Donc $\{\sigma \le \tau\} \in \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$. Le même argument donne $\{\sigma = \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$.

(iii) Comme σ et τ sont tous deux $\mathscr{F}_{\sigma\vee\tau}$-mesurable, $\sigma+\tau$ l'est également. On a $\{\sigma+\tau \le t\} = \{\sigma + \tau \le t\} \cap \{\sigma \vee \tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$, car $\{\sigma + \tau \le t\} \in \mathscr{F}_{\sigma\vee\tau}$.

(iv) Si $T = \lim_n \uparrow T_n$, alors $\{T \le t\} = \cap_n \{T_n \le t\} \in \mathscr{F}_t$, et donc T est un temps d'arrêt.

Pour tout $A \in \mathscr{F}_t$, $A \cap \{T_n > t\} = (A \cap \{T_n > t\}) \cap \{T > t\} \in \mathscr{F}_{T-}$, car $A \cap \{T_n > t\} \in \mathscr{F}_t$. Donc $\mathscr{F}_{T_n-} \subset \mathscr{F}_{T-}$. D'où $\bigvee_n \mathscr{F}_{T_n-} \subset \mathscr{F}_{T-}$. Inversement, pour $A \in \mathscr{F}_t$,

$$A \cap \{T > t\} = \bigcup_n (A \cap \{T_n > t\}) \in \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n-},$$

et donc $\mathscr{F}_{T-} \subset \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n-}$. En conclusion, $\bigvee_n \mathscr{F}_{T_n-} = \mathscr{F}_{T-}$.

(v) On a $\{\tau < t\} = \bigcup_n \{\tau_n < t\} \in \mathscr{F}_t$. Donc τ est un $(\mathscr{F}_{t+})$-temps d'arrêt.

Si $A \in \mathscr{F}_{\tau+}$, alors pour tout n, $A \cap \{\tau_n < t\} = (A \cap \{\tau < t\}) \cap \{\tau_n < t\} \in \mathscr{F}_t$, et donc $A \in \mathscr{F}_{\tau_n+}$. Par conséquent, $\mathscr{F}_{\tau+} \subset \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n+}$. Inversement, si $A \in \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n+}$, alors

$$A \cap \{\tau < t\} = \bigcup_n (A \cap \{\tau_n < t\}) \in \mathscr{F}_t.$$

D'où $\bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n+} \subset \mathscr{F}_{\tau+}$. (vi) Dans ce cas, on a aussi, $\{\tau \le t\} = \cup_n \{\tau_n \le t\} \in \mathscr{F}_t$, et donc τ est un temps d'arrêt.

Si $A \in \mathscr{F}_\tau$, alors $A \cap \{\tau_n \le t\} = (A \cap \{\tau \le t\}) \cap \{\tau_n \le t\} \in \mathscr{F}_t$, et donc $\mathscr{F}_\tau \subset \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n}$. Réciproquement, pour $A \in \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n}$, $A \cap \{\tau \le t\} = \bigcup_n (A \cap \{\tau_n \le t\}) \in \mathscr{F}_t$, et donc $\bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n} \subset \mathscr{F}_\tau$.

(vi) Pour tout $t \ge 0$, on a $\{\sup_{n\ge 1} \tau_n \le t\} = \cap_{n\ge 1}\{\tau_n \le t\} \in \mathscr{F}_t$. Donc τ est un temps d'arrêt.

Exercice 2 Il est clair que N est $(\mathscr{G}_t)$-adapté, et $\mathbb{E}(|N_t|) < \infty$, $\forall t$. Montrons l'inégalité caractéristique.

Soient $s < t$. On a $\mathbb{E}[N_t \,|\, \mathscr{G}_s] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{G}_t) \,|\, \mathscr{G}_s] = \mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{G}_s] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{F}_s) \,|\, \mathscr{G}_s] \ge \mathbb{E}[M_s \,|\, \mathscr{G}_s] = N_s$, comme prévu.

Exercice 3 (i) Fixons $t \ge 0$. Soit $\xi_n := \mathbb{E}(M_n^+ \,|\, \mathscr{F}_t)$. Pour $m > n \ge t$, on a $\xi_n = \mathbb{E}\{\,[\mathbb{E}(M_m \,|\, \mathscr{F}_n)]^+ \,|\, \mathscr{F}_t\} \le \mathbb{E}\{\,\mathbb{E}(M_m^+ \,|\, \mathscr{F}_n) \,|\, \mathscr{F}_t\} = \mathbb{E}\{M_m^+ \,|\, \mathscr{F}_t\} = \xi_m$. Donc la suite $(\xi_n)_{n\ge t}$ est p.s. croissante. En particulier, elle converge p.s., dont la limite est notée X_t.

Par le théorème de convergence monotone, $\mathbb{E}(X_t) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{E}(\xi_n)$. Or, $\mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(M_n^+) \le \sup_{t\ge 0} \mathbb{E}(|M_t|)$, ce qui implique que $\mathbb{E}(X_t) \le \sup_{t\ge 0} \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$. En particulier, $X_t < \infty$ p.s.

(ii) On a vu que, pour tout t, X_t est intégrable, et évidemment $\mathscr{F}_t$-mesurable (en tant que limite simple de variables aléatoires $\mathscr{F}_t$-mesurables). Montrons l'identité caractéristique.

Soient $s < t$, et soit $A \in \mathscr{F}_s$. Comme X_t est la limite croissante de (ξ_n), on a, par convergence monotone, $\mathbb{E}(X_t \,\mathbf{1}_A) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{E}(\xi_n \,\mathbf{1}_A)$. Or, pour $n \ge t$, on a $\mathbb{E}(\xi_n \,\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(M_n^+ \,\mathbf{1}_A)$, et donc $\mathbb{E}(X_t \,\mathbf{1}_A) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{E}(M_n^+ \,\mathbf{1}_A)$. De même, $\mathbb{E}(X_s \,\mathbf{1}_A) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{E}(M_n^+ \,\mathbf{1}_A)$. D'où $\mathbb{E}(X_t \,\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_s \,\mathbf{1}_A)$. Comme $A \in \mathscr{F}_s$ est arbitraire, on déduit que $\mathbb{E}(X_t \,|\, \mathscr{F}_s) = X_s$ p.s.

[On constate que pour les parties (i) et (ii), il suffit que M soit une sous-martingale, avec $\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}(M_t^+) < \infty$.]

(iii) En considérant $-M$ à la place de M, on constate que $\mathbb{E}(M_n^- \,|\, \mathscr{F}_t)$ converge p.s. (lorsque $n \to \infty$) vers une limite notée Y_t, et que $(Y_t,\, t \ge 0)$ est une martingale positive. On a $M_t = X_t - Y_t$, $\forall t \ge 0$.

Exercice 4 La fonction $t \mapsto \mathbb{E}(M_t)$ est croissante sur $[0, 1]$. Par hypothèse, $\mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_1)$; donc $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Soient $0 \le s < t \le 1$. On a $\mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{F}_s) \ge M_s$ p.s. Comme $\mathbb{E}[\,\mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{F}_s)\,] = \mathbb{E}[M_s]$ (elles sont égales à $\mathbb{E}(M_0)$), ceci n'est possible que si $\mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{F}_s) = M_s$ p.s. Autrement dit, M est une martingale.

Exercice 5 La martingale M étant continue à droite, on a $M_{t+\varepsilon} \to M_t$ p.s. D'autre part, comme $M_{t+\varepsilon} = \mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, \mathscr{F}_{t+\varepsilon})$, on constate que la famille $(M_{t+\varepsilon},\, \varepsilon \in]0,\, 1])$ est uniformément intégrable[1]. Donc la convergence a lieu dans L^1 (en rappelant que convergence dans L^1 est une conséquence de convergence en probabilité et intégrabilité uniforme).

Exercice 6 Soit M une martingale continue. Soient $0 \le s < t$ et soit $A \in \mathscr{F}_{s+}$. Il s'agit de prouver que $\mathbb{E}(X_t\, \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_s\, \mathbf{1}_A)$.

Soit $\varepsilon \in]0,\, t-s]$. Comme $A \in \mathscr{F}_{s+\varepsilon}$, on a $\mathbb{E}(X_t\, \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_{s+\varepsilon}\, \mathbf{1}_A)$. On fait $\varepsilon \to 0$. Comme $X_{s+\varepsilon} \to X_s$ dans L^1 (voir l'exercice précédent), on a $\mathbb{E}(X_{s+\varepsilon}\, \mathbf{1}_A) \to \mathbb{E}(X_s\, \mathbf{1}_A)$. D'où $\mathbb{E}(X_t\, \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_s\, \mathbf{1}_A)$.

Exercice 7 Soient $0 \le s < t$. Il s'agit de prouver que p.s. $\mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{F}_s) \ge M_s$. Par définition, $M_t \ge \mathbb{P}(\xi \le s \,|\, \mathscr{F}_t)$; d'où $\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s] \ge \mathbb{E}[\, \mathbb{P}(\xi \le s \,|\, \mathscr{F}_t) \,|\, \mathscr{F}_s] = \mathbb{P}(\xi \le s \,|\, \mathscr{F}_s) = M_s$.

Exercice 8 On a déjà vu dans le cours que $(M_{\tau \wedge t},\, t \ge 0)$ est une martingale, sans l'hypothèse que $(M_t,\, t \ge 0)$ soit uniformément intégrable.

Pour l'intégrabilité uniforme, on constate que, puisque $(M_t,\ t \ge 0)$ est uniformément intégrable, alors $M_{\tau\wedge t} = \mathbb{E}(M_\infty \,|\, \mathscr{F}_{\tau \wedge t})$ (théorème d'arrêt) est uniformément intégrable[2].

Exercice 9 (i) Soit $\tau := \inf\{t \ge 0 :\ M_t \ge x\}$ qui est un temps d'arrêt. Il est clair que $(M_{t\wedge\tau},\ t \ge 0)$ est une martingale continue uniformément intégrable (car $|M_{t\wedge\tau}| \le x + M_0$), fermée par M_τ (avec la convention $M_\infty := 0$). Par le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}(M_\tau \,|\, \mathscr{F}_0) = M_0$. Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_\tau \,|\, \mathscr{F}_0] &= \mathbb{E}[M_\tau\, \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \,|\, \mathscr{F}_0] + \mathbb{E}[M_\infty\, \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}} \,|\, \mathscr{F}_0] \\
&= \mathbb{E}[(x \vee M_0)\, \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \,|\, \mathscr{F}_0] \\
&= (x \vee M_0)\, \mathbb{P}[\tau < \infty \,|\, \mathscr{F}_0],
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}[\tau < \infty \,|\, \mathscr{F}_0] = \frac{M_0}{x \vee M_0} = 1 \wedge \frac{M_0}{x}.$$

Il suffit alors de remarquer que $\{\tau < \infty\} = \{\sup_{t\ge 0} M_t \ge x\}$.

[1] Rappelons que si ξ est une variable aléatoire intégrable, alors $(\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}),\, \mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ sous-tribu) est uniformément intégrable.

[2] Rappelons que si ξ est une variable aléatoire réelle intégrable, alors $(\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}),\, \mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ sous-tribu) est uniformément intégrable.

(ii) Soit $M_t := \exp[2(B_t - t)]$ qui est une martingale continue. Puisque p.s. $\frac{B_t}{t} \to 0$ $(t \to \infty)$, on a, $B_t - t = (\frac{B_t}{t} - 1)t \to -\infty$, p.s., et donc $M_t \to 0$ p.s. D'après (i), $\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0} M_t \geq x\} = 1 \wedge \frac{1}{x}$, $x > 0$, ce qui revient à dire que $\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0}(B_t - t) \geq a\} = \mathrm{e}^{-2a}$, $a > 0$. En d'autres mots, $\sup_{t\geq 0}(B_t - t)$ suit la loi exponentielle de paramètre 2 (donc de moyenne $\frac{1}{2}$).

Exercice 10 Comme S et T sont bornés, l'inégalité de Doob nous dit que B_S et B_T admettent des moments d'ordre deux finis. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(B_T - B_S)^2] &= \mathbb{E}(B_S^2) + \mathbb{E}(B_T^2) - 2\mathbb{E}[\,\mathbb{E}(B_S B_T \,|\, \mathscr{F}_S)\,] \\
&= \mathbb{E}(B_S^2) + \mathbb{E}(B_T^2) - 2\mathbb{E}[\,B_S \mathbb{E}(B_T \,|\, \mathscr{F}_S)\,],
\end{aligned}$$

car B_S est $\mathscr{F}_S$)-mesurable (B étant un processus progressif). D'après le théorème d'arrêt appliqué à la martingale continue B et au couple de temps d'arrêt bornés S et T, on a $\mathbb{E}(B_T \,|\, \mathscr{F}_S) = B_S$, ce qui donne

$$\mathbb{E}[(B_T - B_S)^2] = \mathbb{E}(B_S^2) + \mathbb{E}(B_T^2) - 2\mathbb{E}[\,B_S^2] = \mathbb{E}(B_T^2) - \mathbb{E}(B_S^2).$$

On applique maintenant le théorème d'arrêt à la martingale continue $(B_t^2 - t,\ t \geq 0)$ et au couple de temps d'arrêt bornés T et 0, pour voir que $\mathbb{E}(B_T^2 - T) = 0$ et donc $\mathbb{E}(B_T^2) = \mathbb{E}(T)$. De même, $\mathbb{E}(B_S^2) = \mathbb{E}(S)$. Donc $\mathbb{E}(B_T^2) - \mathbb{E}(B_S^2) = \mathbb{E}(T - S)$.

Exercice 11 **(i)** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et considérons la martingale continue suivante :

$$M_t := \sinh(\theta(B_t + a)) \exp\Big(- \frac{\theta^2}{2}\, t\Big).$$

Comme $(M_{t\wedge T_{a,b}},\ t \geq 0)$ (que l'on écrit de temps en temps $M^{T_{a,b}}$) est une martingale continue et bornée, donc fermée par $\sinh(\theta(B_{T_{a,b}} + a)) \exp(-\frac{\theta^2}{2} T_{a,b})$, le théorème d'arrêt nous dit que

$$\begin{aligned}
\sinh(\theta a) &= \mathbb{E}\Big[\sinh(\theta(B_{T_{a,b}} + a)) \exp\Big(- \frac{\theta^2}{2} T_{a,b}\Big)\Big] \\
&= \sinh(\theta(a+b))\mathbb{E}\Big[\, \exp\Big(- \frac{\theta^2}{2} T_b\Big)\, \mathbf{1}_{\{T_b < T_{-a}\}}\Big].
\end{aligned}$$

Donc

$$(*) \qquad \mathbb{E}\Big[\, \exp\Big(- \frac{\theta^2}{2} T_b\Big)\, \mathbf{1}_{\{T_b < T_{-a}\}}\Big] = \frac{\sinh(\theta a)}{\sinh(\theta(a+b))}.$$

En échangeant les rôles de a et de b (il suffit de remplacer B par $-B$), on a également

$$(**)\qquad \mathbb{E}\Big[\,\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}T_{-a}\Big)\,\mathbf{1}_{\{T_b>T_{-a}\}}\Big] = \frac{\sinh(\theta b)}{\sinh(\theta(a+b))}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[e^{-\theta^2 T_{a,b}/2}\Big] &= \mathbb{E}\Big[\,\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}T_b\Big)\,\mathbf{1}_{\{T_b<T_{-a}\}}\Big] + \mathbb{E}\Big[\,\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}T_{-a}\Big)\,\mathbf{1}_{\{T_b>T_{-a}\}}\Big]\\ &= \frac{\sinh(\theta a)+\sinh(\theta b)}{\sinh(\theta(a+b))}\\ &= \frac{\cosh(\frac{\theta(a-b)}{2})}{\cosh(\frac{\theta(a+b)}{2})},\end{aligned}$$

alors

$$\mathbb{E}\Big[e^{-\lambda T_{a,b}}\Big] = \frac{\cosh(\frac{a-b}{2}\sqrt{2\lambda}\,)}{\cosh(\frac{a+b}{2}\sqrt{2\lambda}\,)}, \qquad \lambda \geq 0.$$

(ii) On fait $\theta \to 0$ dans $(*)$ et $(**)$ pour voir que

$$\mathbb{P}(T_b < T_{-a}) = \frac{a}{a+b}, \qquad \mathbb{P}(T_b > T_{-a}) = \frac{b}{a+b}.$$

(iii) D'après (ii), pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T_{-1}} B_t \geq x\Big) = \mathbb{P}(T_x < T_{-1}) = \frac{1}{1+x}.$$

Autrement dit, $\sup_{0\leq t\leq T_{-1}} B_t$ a la même loi que $\frac{1-U}{U}$, où U est uniformément distribuée sur $]0,1[$.

Un cas spécial est $a = b$. Soit $T_a^* := \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}$. Alors $\mathbb{E}[e^{-\theta^2 T_a^*/2}] = \frac{1}{\cosh(\theta a)}$.

Exercice 12 Considérons la martingale $M_t := e^{-2\gamma B_t - 2\gamma^2 t}$. Comme

$$\exp\{-2\gamma B_{t\wedge T_{a,b}} - 2\gamma^2(t\wedge T_{a,b})\} \leq e^{2|\gamma|(a+b)},$$

on voit que $M^{T_{a,b}}$ est une martingale continue bornée, fermée par $M_{T_{a,b}}$. D'après le théorème d'arrêt,

$$\begin{aligned}1 &= \mathbb{E}[e^{-2\gamma B_{T_{a,b}} - 2\gamma^2 T_{a,b}}]\\ &= \mathbb{E}[e^{2\gamma a}\,\mathbf{1}_{\{T_{-a}<T_b\}}] + \mathbb{E}[e^{-2\gamma b}\,\mathbf{1}_{\{T_{-a}>T_b\}}]\\ &= e^{2\gamma a} - e^{2\gamma a}\,\mathbb{P}(T_{-a}>T_b) + e^{-2\gamma b}\,\mathbb{P}(T_{-a}>T_b),\end{aligned}$$

ce qui donne[3] $\mathbb{P}(T_{-a} > T_b) = \frac{e^{2\gamma a}-1}{e^{2\gamma a}-e^{-2\gamma b}}$.

[3] En faisant $a \to \infty$, on voit que $\mathbb{P}(T_b < \infty)$ vaut 1 si $\gamma > 0$, et $e^{2\gamma b}$ si $\gamma < 0$, ce qui est en accord avec l'Exercice 12, car $\mathbb{P}(T_b < \infty) = \mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0}(B_t + \gamma t) \geq b\}$.

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.
Feuille 4.
Solutions

Exercice 1. Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt qui réduit M. Soit $\sigma_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t - M_0| \geq n\}$, et soit $T_n := \tau_n \wedge \sigma_n$. Alors (T_n) est une suite de temps d'arrêt telle que $T_n \uparrow \infty$ p.s. De plus, pour tout n, $M^{T_n} - M_0$ est bornée (par n). $\square$

Exercice 2. Soit
$$\sigma_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t - M_0| \geq n\}.$$
Pour tout n, $M^{T_n} - M_0$ est une martingale locale continue, et $M^{T_n \wedge \sigma_n} - M_0$ en est également une, qui est, en plus, bornée (par n). Par conséquent, $M^{T_n \wedge \sigma_n} - M_0$ est une (vraie) martingale uniformément intégrable. Comme $(T_n \wedge \sigma_n)$ est une suite de temps d'arrêt qui croît vers l'infini, on déduit que M est une martingale locale. $\square$

Exercice 3. "$\Rightarrow$" Trivial, car $M_T = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_T]$ si M est une martingale uniformément intégrable.

"$\Leftarrow$" Supposons que $(M_T \, \mathbf{1}_{\{T<\infty\}},\ T$ temps d'arrêt$)$ est uniformément intégrable. En particulier, pour tout t, M_t est intégrable. Soient $s < t$ et $A \in \mathscr{F}_s$. Il s'agit de montrer que $\mathbb{E}[M_s \, \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[M_t \, \mathbf{1}_A]$.

Puisque M est une martingale local, soit (T_n) une suite de temps d'arrêt qui réduit M : comme M_0 est intégrable, M^{T_n} est une martingale. D'où : $\mathbb{E}[\, M_{s\wedge T_n} \, \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\, M_{t \wedge T_n} \, \mathbf{1}_A]$. On fait $n \to \infty$. Comme $M_{s\wedge T_n} \to M_s$, et $(M_{s\wedge T_n},\ n \geq 1)$ est uniformément intégrable, on a[1] $M_{s\wedge T_n} \to M_s$ dans L^1. Donc on a $\mathbb{E}[\, M_{s\wedge T_n} \, \mathbf{1}_A] \to \mathbb{E}[\, M_s \, \mathbf{1}_A]$. De même, $\mathbb{E}[\, M_{t\wedge T_n} \, \mathbf{1}_A] \to \mathbb{E}[\, M_t \, \mathbf{1}_A]$. Par conséquent, $\mathbb{E}[\, M_s \, \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\, M_t \, \mathbf{1}_A]$. $\square$

Exercice 4. **(i)** Fixons $n \geq 1$. Par hypothèse, M^{T_n} est une (vraie) martingale uniformément intégrable ; d'après le théorème d'arrêt, on a $M_{T\wedge T_n} = \mathbb{E}(M_{T_n} \,|\, \mathscr{F}_T)$. Donc $|M_{T \wedge T_n}| \leq \mathbb{E}(|M_{T_n}| \,|\, \mathscr{F}_{T\wedge T_n})$. En prenant espérance dans les deux côtés, on obtient l'inégalité désirée.

(ii) Il s'agit de prouver que $\sup_n \mathbb{E}(|M_{T_n}|) \geq \sup\{\mathbb{E}(|M_T|),\ T$ temps d'arrêt fini$\}$. Il suffira donc de vérifier que pour tout temps d'arrêt fini T, on a $\mathbb{E}(|M_T|) \leq \sup_n \mathbb{E}(|M_{T_n}|)$.

[1] Rappelons que, dans le cas discret, convergence dans L^1 équivaut à convergence en probabilité plus intégrabilité uniforme.

Soit T un temps d'arrêt fini. D'après (i), on a $\mathbb{E}(|M_{T\wedge T_n}|) \le \mathbb{E}(|M_{T_n}|) \le \sup_m \mathbb{E}(|M_{T_m}|)$. On fait $n \to \infty$: par le lemme de Fatou, on obtient $\mathbb{E}(|M_T|) \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(|M_{T\wedge T_n}|) \le \sup_m \mathbb{E}(|M_{T_m}|)$. □

Exercice 5. Soit $M_t := \mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{F}_t)$, $t \ge 0$, qui est une martingale (continue à droite) bornée, fermée par $M_\infty := \mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{F}_\infty)$ (théorème de Lévy). Comme A est borné, $\int_0^\infty M_t \,\mathrm{d}A_t$ est bien définie, qui est aussi bornée.

Si l'on note $t_i^n := \frac{i}{2^n}$, $i = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$, alors $\sum_{i=1}^\infty M_{t_i^n}(A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}) \to \int_0^\infty M_t \,\mathrm{d}A_t$ p.s. (convergence dominée).[2] De nouveau par convergence dominée,

$$I := \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^\infty M_{t_i^n}(A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n})\Big] \to \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty M_t \,\mathrm{d}A_t\Big].$$

On étudie maintenant le terme I. Par Fubini,

$$I = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}[M_{t_i^n}(A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n})] = \sum_{i=1}^\infty \big[\,\mathbb{E}(M_{t_i^n} A_{t_i^n}) - \mathbb{E}(M_{t_i^n} A_{t_{i-1}^n})\,\big].$$

Comme $\mathbb{E}(M_{t_i^n} A_{t_{i-1}^n}) = \mathbb{E}[A_{t_{i-1}^n} \mathbb{E}(M_{t_i^n} \,|\, \mathscr{F}_{t_{i-1}^n})] = \mathbb{E}[A_{t_{i-1}^n} M_{t_{i-1}^n}]$, ce qui entraîne que

$$I = \sum_{i=1}^\infty \big[\,\mathbb{E}(M_{t_i^n} A_{t_i^n}) - \mathbb{E}(M_{t_{i-1}^n} A_{t_{i-1}^n})\,\big] = \mathbb{E}(A_\infty M_\infty).$$

Or, $M_\infty = \mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{F}_\infty)$, et A_∞ est $\mathscr{F}_\infty$-mesurable, on obtient $I = \mathbb{E}(A_\infty Y)$. □

Exercice 6. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, et soit $T := \inf\{t \ge 0 : |B_t| = 1\}$. Alors $M := B^T$ est une martingale continue, bornée par 1.

D'autre part, $\langle M \rangle_t = \langle B \rangle_{t\wedge T} = t \wedge T$, qui n'est pas bornée (car T ne l'est pas). □

Exercice 7. Soient M et N des martingales locales continues, et soit A un processus à variation finie tel que $MN - A$ est une martingale, alors A est (indistingable de) $\langle M,\, N\rangle$. En particulier, en prenant $N = M$, on obtient le résultat désiré. □

Exercice 8. Si M et N sont des martingales locales continues, alors $\langle M + N\rangle = \langle M\rangle + \langle N\rangle + 2\langle M,\, N\rangle$. Donc

$$\langle M\rangle = \langle M - M^T\rangle + \langle M^T\rangle + 2\langle M - M^T,\, M^T\rangle.$$

[2] En effet, soit $M_t^n := M_{t_i^n} \mathbf{1}_{[t_{i-1}^n,\, t_i^n[}(t)$, alors pour tout $t \ge 0$, la continuité à droite de M implique que $M_t^n \to M_t$ p.s., et une application du théorème de convergence dominée entraîne que $\sum_{i=1}^\infty M_{t_i^n}(A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}) = \int_0^\infty M_t^n \,\mathrm{d}A_t \to \int_0^\infty M_t \,\mathrm{d}A_t$ p.s.

Or, $\langle M^T \rangle = \langle M \rangle^T$, et $\langle M - M^T, M^T \rangle = \langle M, M^T \rangle - \langle M^T, M^T \rangle = 0$, ce qui implique que $\langle M \rangle = \langle M - M^T \rangle + \langle M \rangle^T$. □

Exercice 9. (i) Comme $\langle M, N \rangle$ ne dépend que des accroissements de M et de N, on peut supposer, sans perte de généralité, que $M_0 = N_0 = 0$ p.s.

Supposons pour l'instant que M et N sont (des martingales) bornées. Soient $(\mathscr{F}_t^M)$ et $(\mathscr{F}_t^N)$ leurs filtrations canoniques respectives. Il est clair, par définition, que M est une $(\mathscr{F}_t^M)$-martingale, et N une $(\mathscr{F}_t^N)$-martingale. Pour $s < t$, $A \in \mathscr{F}_s^M$ et $B \in \mathscr{F}_s^N$, on a $\mathbb{E}(M_t N_t \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) = \mathbb{E}(M_t \mathbf{1}_A) \mathbb{E}(N_t \mathbf{1}_B)$, qui n'est autre que $\mathbb{E}(M_s \mathbf{1}_A) \mathbb{E}(N_s \mathbf{1}_B) = \mathbb{E}(M_s N_s \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)$. Par classe monotone, on obtient $\mathbb{E}(M_t N_t \mathbf{1}_G) = \mathbb{E}(M_s N_s \mathbf{1}_G)$ pour tout $G \in \mathscr{F}_s^{M,N} := \mathscr{F}_s^M \vee \mathscr{F}_s^N$. Donc $\mathbb{E}(M_t N_t \,|\, \mathscr{F}_s^{M,N}) = M_s N_s$. Il résulte que MN est une $(\mathscr{F}_t^{M,N})$-martingale. Par conséquent, $\langle M, N \rangle = 0$. (Il est important de remarquer que $\langle M, N \rangle$ ne dépend pas du choix de la filtration.)

Dans le cas général, soient $S_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$ et $T_n := \inf\{t \geq 0 : |N_t| \geq n\}$. Pour chaque n, comme M^{S_n} et N^{T_n} sont des martingales bornées indépendantes, on a $\langle M^{S_n}, N^{T_n} \rangle = 0$, c'est-à-dire, $\langle M, N \rangle^{S_n \wedge T_n} = 0$. En faisant $n \to \infty$, on voit que $\langle M, N \rangle = 0$.

(ii) Il est clair que M^T et $M - M^T$ sont des martingales locales orthogonales, car $\langle M^T, M - M^T \rangle = \langle M^T, M \rangle - \langle M^T, M^T \rangle = 0$.

Les martingales locales M^T et $M - M^T$ ne sont, en général, pas indépendantes. Par exemple, prenons $M_t := B_t^2 - t$. Pour $s < t$, les variables aléatoires B_s^2 et $B_t^2 - B_s^2$ ne sont pas indépendantes, car

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}[B_s^2 (B_t^2 - B_s^2)^2] \\
= \; & \mathbb{E}\{B_s^2 [(B_t - B_s)^2 (B_t - B_s + 2B_s)^2] \\
= \; & \mathbb{E}(B_s^2) \, \mathbb{E}[(B_t - B_s)^4] + 4\mathbb{E}(B_s^3) \, \mathbb{R}[(B_t - B_s)^3] + 4\mathbb{E}(B_s^4) \, \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] \\
= \; & 3s(t-s)^2 + 12 s^2 (t-s),
\end{aligned}
$$

tandis que

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}(B_s^2) \, \mathbb{E}[(B_t^2 - B_s^2)^2] \\
= \; & \mathbb{E}[(B_t - B_s)^4] + 4s \, \mathbb{R}[(B_t - B_s)^3] \, \mathbb{E}(B_s) + 4s \, \mathbb{E}(B_s^4) \, \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] \, \mathbb{E}(B_s^2) \\
= \; & 3s(t-s)^2 + 4s^2(t-s).
\end{aligned}
$$

On voit bien que $\mathrm{Cov}[B_s^2, (B_t^2 - B_s^2)^2] > 0$. □

Exercice 10. Puisque $\langle M+N\rangle = \langle M\rangle + \langle N\rangle + 2\langle M,\, N\rangle$, l'inégalité de Kunita–Watanabe entraîne que $\sqrt{\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}\langle M+N\rangle_s} \le \sqrt{\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}\langle M\rangle_s} + \sqrt{\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}\langle N\rangle_s}$. D'où la conclusion cherchée. □

Exercice 11. **(i)** Soit $t \ge 0$. On a $\{(\tau - T)^+ \le t\} = \{\tau \le T + t\} \in \mathscr{F}_{t+T}$. Donc $(\tau - T)^+$ est un $(\mathscr{F}_{t+T})$-temps d'arrêt.

(ii) Écrivons $X_t := M_{t+T}$, $t \ge 0$. Soit (T_n) une suite de $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt qui réduit M. Posons $S_n := (T_n - T)^+$, qui d'après la question précédente est un $(\mathscr{F}_{t+T})$-temps d'arrêt. Montrons que $X^{S_n} - X_0$ est une $(\mathscr{F}_{t+T})$-martingale.

Par définition, $X_t^{S_n} = M_{(t\wedge S_n)+T} = M_{t+T}^{S_n+T}$, et donc

$$\begin{aligned} X_t^{S_n} - X_0 &= M_{t+T}^{S_n+T} - M_T = M_{t+T}^{T_n}\, \mathbf{1}_{\{T_n \ge T\}} + M_T\, \mathbf{1}_{\{T_n < T\}} - M_T \\ &= (M_{t+T}^{T_n} - M_T^{T_n})\, \mathbf{1}_{\{T_n \ge T\}}. \end{aligned}$$

Soit $s < t$. Comme $\{T_n \ge T\} \in \mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{s+T}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\, X_t^{S_n} - X_0 \,|\, \mathscr{F}_{s+T}] &= \mathbf{1}_{\{T_n \ge T\}}\, \mathbb{E}[\, (M_{t+T}^{T_n} - M_0) - (M_T^{T_n} - M_0) \,|\, \mathscr{F}_{s+T}] \\ &= \mathbf{1}_{\{T_n \ge T\}}\, [\, (M_{s+T}^{T_n} - M_0) - (M_T^{T_n} - M_0)] \\ &= X_s^{S_n} - X_0, \end{aligned}$$

où, dans la deuxième identité, on a appliqué le théorème d'arrêt à la martingale continue fermée $M^{T_n} - M_0$. On a donc prouvé que X est une $(\mathscr{F}_{t+T})$-martingale locale.

Considérons la martingale locale $M^2 - \langle M\rangle$. D'après ce que l'on vient de démontrer, $M_{t+T}^2 - \langle M\rangle_{t+T}$, et donc $M_{t+T}^2 - \langle M\rangle_{t+T} + \langle M\rangle_T$ aussi, sont des $(\mathscr{F}_{t+T})$-martingales locales. Par conséquent, $\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_{t+T} - \langle M\rangle_T$. □

Exercice 12. "$\Leftarrow$" Il suffit d'écrire $\langle M\rangle$ comme la variation quadratique (convergence en probabilité) de la martingale locale M.

"$\Rightarrow$" En ne considérant que les instants rationnels, il suffit de prouver que pour tous $s < r$, p.s., si $\langle M\rangle_s(\omega) = \langle M\rangle_r(\omega)$ alors $M_u(\omega) = M_s(\omega)$, $\forall u \in [s,\, r]$.

Fixons $s > 0$. Soit $N_t := M_{s+t} - M_s$, $t \ge 0$. D'après l'exercice précédent, N est une $(\mathscr{F}_{t+s})$-martingale locale avec $\langle N\rangle_t = \langle M\rangle_{s+t} - \langle M\rangle_s$. Soit

$$T_s := \inf\{t \ge 0 :\, \langle N\rangle_t > 0\} = \inf\{t \ge s :\, \langle M\rangle_t > \langle M\rangle_s\} - s, \qquad (\inf \varnothing := \infty),$$

qui est un $(\mathscr{F}_{t+s})$-temps d'arrêt, car N est une $(\mathscr{F}_{t+s})$-martingale locale. Considérons la $(\mathscr{F}_{t+s})$-martingale locale N^{T_s} : on a

$$\langle N^{T_s}\rangle_t = \langle N\rangle_{T_s\wedge t} = \langle M\rangle_{s+(T_s\wedge t)} - \langle M\rangle_s,$$

qui est nul d'après la définition de T_s. Donc N^{T_s} est (indistingable de la martingale) nulle. Autrement dit, M est p.s. constante sur $[s,\, s+T_s]$.

Soit $r > s$. Presque sûrement, si $\langle M\rangle_s(\omega) = \langle M\rangle_r(\omega)$, alors $r \le s + T_s$ par la définition de T_s, et donc d'après ce que l'on a prouvé dans le paragraphe précédent, M est constante sur $[s,\, r]$. $\square$

Exercice 13. **(i)** Soit $n \ge 1$ et soit $S_n := \inf\{t \ge 0 :\ M_t^2 + \langle M\rangle_t \ge n\}$. La martingale locale continue $(M^{S_n})^2 - \langle M^{S_n}\rangle$ étant bornée par n, elle est une (vraie) martingale uniformément intégrable. Par le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}(M^2_{S_n\wedge T}) = \mathbb{E}(\langle M\rangle_{S_n\wedge T}) \le \mathbb{E}(\langle M\rangle_T)$. On obtient alors l'inégalité cherchée en faisant $n \to \infty$ et à l'aide du lemme de Fatou.

(ii) D'après (i), on a $\mathbb{E}(\langle M\rangle_{T_a\wedge t}) \ge \mathbb{E}(M^2_{T_a\wedge t}) \ge \mathbb{E}(M^2_{T_a\wedge t}\,\mathbf{1}_{\{T_a\le t\}}) = a^2\,\mathbb{P}(T_a \le t)$ car $M^2_{T_a\wedge t} = a^2$ sur $\{T_a \le t\}$.

(iii) Il suffit d'appliquer (ii) et de remarquer que $\{\sup_{s\in[0,\,t]} |M_s| \ge a\} = \{T_a \le t\}$ et que $\langle M\rangle_{T_a\wedge t} \le \langle M\rangle_t$. $\square$

Exercice 14. **(i)** D'après la question (i) de l'exercice précédent, on a, pour tout $t > 0$, $\mathbb{E}(\langle M\rangle_{\tau_a\wedge T_a\wedge t}) \ge \mathbb{E}(M^2_{\tau_a\wedge T_a\wedge t})$. Donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\langle M\rangle_{\tau_a\wedge T_a}) &\ge \mathbb{E}(M^2_{\tau_a\wedge T_a\wedge t})\\
&\ge \mathbb{E}(M^2_{\tau_a\wedge T_a\wedge t}\,\mathbf{1}_{\{T_a\le \tau_a\wedge t\}})\\
&= a^2\,\mathbb{P}(T_a \le \tau_a\wedge t)\\
&= a^2\,\mathbb{P}\Big(\sup_{s\in[0,\,\tau_a\wedge t]} |M_s| \ge a\Big)\\
&\ge a^2\,\mathbb{P}\Big(\sup_{s\in[0,\,\tau_a\wedge t]} |M_s| > a\Big).
\end{aligned}
$$

On fait $t \uparrow \infty$. Par convergence monotone, cela donne $\mathbb{E}(\langle M\rangle_{\tau_a\wedge T_a}) \ge a^2\,\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,\,\tau_a]} |M_s| > a)$. Il suffit alors, pour obtenir l'inégalité cherchée, de remarquer que $\langle M\rangle_{\tau_a\wedge T_a} \le a^2 \wedge \langle M\rangle_\infty$.

(ii) On a $\mathbb{P}(\sup_{t\ge 0} |M_t| > a) \le \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,\,\tau_a]} |M_t| > a) + \mathbb{P}(\tau_a < \infty)$. Il ne reste alors que d'appliquer (i) et de remarquer que $\{\tau_a < \infty\} \subset \{\langle M\rangle_\infty \ge a^2\}$.

(iii) On part de l'identité $\mathbb{E}(\sup_{t\ge 0} |M_t|) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\sup_{t\ge 0} |M_t| > a)\,\mathrm{d}a$ et applique l'inégalité prouvée dans la question précédente, pour voir (par Fubini–Tonelli) que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{t\ge 0} |M_t|\Big) &\le \int_0^\infty \mathbb{P}(\langle M\rangle_\infty \ge a^2)\,\mathrm{d}a + \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty \frac{a^2\wedge\langle M\rangle_\infty}{a^2}\,\mathrm{d}a\Big)\\
&= \mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\,) + \mathbb{E}\Big(\int_0^{\sqrt{\langle M\rangle_\infty}} \mathrm{d}a + \int_{\sqrt{\langle M\rangle_\infty}}^\infty \frac{\langle M\rangle_\infty}{a^2}\,\mathrm{d}a\Big)\\
&= 3\,\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\,).
\end{aligned}
$$

(iv) Supposons que $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\,) < \infty$. D'après la question précédente, $\mathbb{E}(\sup_{t\geq 0}|M_t|) < \infty$. Donc M est une (vraie) martingale uniformément intégrable.

(v) Fixons $t \geq 0$. Par hypothèse, $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M^t\rangle_\infty}\,) < \infty$. D'après la question précédente, $\sup_{s\geq 0}|M_s^t| = \sup_{u\in[0,\,t]}|M_u|$ est intégrable. Ceci étant vrai pour tout t, on déduit que M est une martingale. $\square$

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.
Feuille 5.
Solutions

Exercice 0. Pour le point (v), utiliser que les fonctions en escalier (i.e. de la forme $h(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{\{t\in[a_i,b_i]\}}$) sont denses dans $L^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}t)$.

Exercice 1. Soit $N := H \cdot M$, qui est une martingale locale continue, telle que $\langle N\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s$. Donc pour tout ω fixé, $\langle N\rangle$ est constant sur $[s, t]$ si $H_u = 0$ $\forall u \in [s, t]$, ou si $u \mapsto M_u$ est constante sur $[s, t]$. Il suffira alors d'utiliser le résultat, prouvé dans un exercice du chapitre précédent, disant que pour toute martingale locale continue L, p.s. pour tous $s < t$, dire que L est constante sur $[s, t]$ équivaut à dire que $\langle L\rangle_s = \langle L\rangle_t$. $\square$

Exercice 2. On sait que $H \cdot M$ est une martingale locale issue de 0. Donc $H \cdot M \in \mathscr{M}^2$ si et seulement si $\mathbb{E}[\langle H \cdot M\rangle_\infty] < \infty$. Or, $\langle H \cdot M\rangle_\infty = \int_0^\infty H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s$, ce qui donne le résultat cherché. $\square$

Exercice 3. Si $S = T$, c'est un résultat du cours.

Posons $\widetilde{M} := H \cdot M$ et $\widetilde{N} := K \cdot N$, qui sont deux martingales continues bornées dans L^2, donc uniformément intégrables. Comme $\{S \le T\} \in \mathscr{F}_S$, on a, par le théorème d'arrêt appliqué à la martingale $\widetilde{N}$ qui est uniformément intégrable,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\, \widetilde{M}_S \widetilde{N}_T \, \mathbf{1}_{\{S\le T\}} \,|\, \mathscr{F}_S) &= \widetilde{M}_S \, \mathbf{1}_{\{S\le T\}} \, \mathbb{E}(\, \widetilde{N}_{T\vee S} \,|\, \mathscr{F}_S) \\
&= \widetilde{M}_S \, \mathbf{1}_{\{S\le T\}} \, \widetilde{N}_S \\
&= \widetilde{M}_{S\wedge T} \widetilde{N}_{S\wedge T} \, \mathbf{1}_{\{S\le T\}},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\mathbb{E}(\, \widetilde{M}_S \widetilde{N}_T \, \mathbf{1}_{\{S\le T\}}) = \mathbb{E}(\widetilde{M}_{S\wedge T} \widetilde{N}_{S\wedge T} \, \mathbf{1}_{\{S\le T\}}).$$

D'autre part, $\widetilde{M}_S \widetilde{N}_T \, \mathbf{1}_{\{S>T\}} = \widetilde{M}_{S\wedge T} \widetilde{N}_{S\wedge T} \, \mathbf{1}_{\{S>T\}}$, et donc

$$\mathbb{E}(\, \widetilde{M}_S \widetilde{N}_T \, \mathbf{1}_{\{S>T\}}) = \mathbb{E}(\widetilde{M}_{S\wedge T} \widetilde{N}_{S\wedge T} \, \mathbf{1}_{\{S>T\}}).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(\, \widetilde{M}_S \widetilde{N}_T) = \mathbb{E}(\widetilde{M}_{S\wedge T} \widetilde{N}_{S\wedge T}),$$

qui n'est autre, d'après la remarque au début de l'exercice, que $\mathbb{E}(\int_0^{S\wedge T} H_s K_s \, \mathrm{d}\langle M, N\rangle_s)$.$\square$

Exercice 4. La convergence est claire si X est un processus à variation finie. On suppose donc que $X = M$ est une martingale locale issue de 0.

Soit $T_m := \inf\{t \geq 0 : \ |H_t| + \langle M\rangle_t \geq m\}$. Par convergence dominée, pour chaque m et $t \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_u^n)^2 \, \mathbf{1}_{[0,T_m]}(u) \, \mathrm{d}\langle M^{T_m}\rangle_u\right] = 0.$$

Comme $[(H^n \, \mathbf{1}_{[0,T_m]}) \cdot M^{T_m}]^2 - \int_0^\cdot (H_u^n)^2 \, \mathbf{1}_{[0,T_m]}(u) \, \mathrm{d}\langle M^{T_m}\rangle_u$ est une martingale dans $\mathscr{M}^2$, on obtient:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{ \left[(H^n \, \mathbf{1}_{[0,T_m]}) \cdot M^{T_m}\right]_t^2 \right\} = 0.$$

L'inégalité de Doob (appliquée à la martingale $(H^n \, \mathbf{1}_{[0,T_m]}) \cdot M^{T_m}$) nous dit alors que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{ \sup_{0\leq s\leq t\wedge T_m} (H^n \cdot M)_s^2 \right\} = 0.$$

A fortiori, $\sup_{0\leq s\leq t\wedge T_m} |(H^n \cdot M)_s| \to 0$ en probabilité.

Le reste de l'argument est de routine. En effet, d'une part, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $m_0 < \infty$ tel que $\mathbb{P}(T_{m_0} < t) < \varepsilon$, et d'autre part, il existe $n_0 < \infty$ tel que $\mathbb{P}[\sup_{0\leq s\leq t\wedge T_{m_0}} |(H^n \cdot M)_s| > \varepsilon] < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, de sorte que

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{s\in[0,t]} |(H^n \cdot M)_s| > \varepsilon\Big] \leq \mathbb{P}\Big[\sup_{0\leq s\leq t\wedge T_{m_0}} |(H^n \cdot M)_s| > \varepsilon\Big] + \mathbb{P}(T_{m_0} < t) \leq 2\varepsilon,$$

ce qui implique la convergence cherchée. $\square$

Exercice 5. La preuve se fait en deux étapes.

Première étape. Montrons le théorème de Fubini pour le cas spécial où H est une fonction indicatrice.

On utilise un argument par classe monotone. Soit

$$\mathscr{G} := \Big\{D \in \mathscr{P} \otimes \mathscr{E} : \int_E \int_0^t \mathbf{1}_D \, \mathrm{d}M_s \, \mu(\mathrm{d}x) = \int_0^t \int_E \mathbf{1}_D \, \mu(\mathrm{d}x) \, \mathrm{d}M_s, \ \forall t\Big\}.$$

On voit que $\mathscr{G}$ est une classe monotone : $(\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times E \in \mathscr{G}$; si $D_1 \subset D_2$ sont des éléments de $\mathscr{G}$, alors $D_2 \backslash D_1 \in \mathscr{G}$; si $(D_n) \uparrow$ dans $\mathscr{G}$, alors $\cup_{n\geq 1} D_n \in \mathscr{G}$ (à l'aide du théorème de convergence dominée pour intégrales stochastiques, prouvé dans un exercice précédent).

D'autre part, il est clair que $\mathscr{G} \supset \mathscr{C} := \{A \times B \in \mathscr{G} : \ A \in \mathscr{P}, \ B \in \mathscr{E}\}$. Comme $\mathscr{C}$ est stable par intersections finies, on a, par classe monotone, $\mathscr{G} \supset \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$. En d'autres mots, on a prouvé le théorème de Fubini pour $H := \mathbf{1}_D$, $D \in \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$.

Seconde étape. Montrons le théorème de Fubini pour les processus $\mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$-mesurables et bornés.

On utilise un argument standard. D'après la première étape, le théorème de Fubini est valable pour les fonctions étagées (combinaisons linéaires finis de fonctions indicatrices de parties mesurables). Toute fonction mesurable positive étant la limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives, on déduit, grâce au théorème de convergence dominée pour intégrales stochastiques prouvé dans un exercice précédent, que le théorème de Fubini est encore valable pour les processus mesurables bornés et positifs. Enfin, en considérant séparément les parties positive et négative, on obtient le théorème pour les processus mesurables bornées. $\square$

Exercice 6. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, et soit $T := \inf\{t \geq 0 : \, |B_t| = 1\}$. On pose $H_t = B_t \, \mathbf{1}_{[0,T]}(t)$ et $X_t = B_{t\wedge T}$. Les processus H et X sont bornés (par 1). D'autre part, $\int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s = \int_0^{t\wedge T} B_s \, \mathrm{d}B_s$. Par intégration par parties, $\int_0^t B_s \, \mathrm{d}B_s = (B_t^2 - t)/2$, donc $\int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s = [\, B_{t\wedge T}^2 - (t \wedge T)]/2$, qui n'est pas bornée inférieurement. $\square$

Exercice 7. (i) Le processus C est un processus croissant, il est donc une semimartingale continue dont la partie martingale est nulle. On a $\langle M, C\rangle = 0$. Par intégration par parties, $M_t C_t = \int_0^t M_s \, \mathrm{d}C_s + \int_0^t C_s \, \mathrm{d}M_s + \langle M, C\rangle_t = \int_0^t M_s \, \mathbf{1}_{\{M_s=0\}} \, \mathrm{d}s + \int_0^t C_s \, \mathrm{d}M_s = \int_0^t C_s \, \mathrm{d}M_s$, ce qui est une martingale locale.

(ii) On a $\langle L, \widetilde{L}\rangle_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{M_s \in A\}} \, \mathbf{1}_{\{M_s \in \widetilde{A}\}} \, \mathrm{d}\langle M, N\rangle_s = 0$ (car $A \cap \widetilde{A} = \varnothing$), c'est-à-dire L et $\widetilde{L}$ sont orthogonales. $\square$

Exercice 8. On sait que $N := M \cdot M$ est une martingale locale continue. Montrons qu'elle est une (vraie) martingale, qui est uniformément intégrable.

Par intégration par parties, $N_t = \frac{1}{2}\,(M_t^2 - M_0^2) - \frac{1}{2}\,\langle M\rangle_t$. Comme M est une martingale continue bornée dans L^2, on a $\mathbb{E}(\sup_{t\geq 0} M_t^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(\langle M\rangle_\infty) < \infty$. Par conséquent, $\mathbb{E}(\sup_{t\geq 0} |N_t|) < \infty$. Un résultat du cours nous dit alors que N est une (vraie) martingale uniformément intégrable. $\square$

Exercice 9. Remarquons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{B_\varepsilon} \int_0^\varepsilon H_s \, \mathrm{d}B_s$ est p.s. bien défini, car $B_\varepsilon \neq 0$ p.s.

Le processus progressif localement borné H_0 (qui, en réalité, ne dépend pas du temps) a pour intégrale $\int_0^t H_0 \, \mathrm{d}B_s = H_0 \, B_t$. Donc

$$\frac{1}{B_\varepsilon} \int_0^\varepsilon H_s \, \mathrm{d}B_s - H_0 = \frac{1}{B_\varepsilon} \int_0^\varepsilon (H_s - H_0) \, \mathrm{d}B_s =: \frac{M_\varepsilon}{B_\varepsilon}$$

D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\mathbb{E}\Big\{\Big|\frac{1}{B_\varepsilon}\int_0^\varepsilon H_s\,\mathrm{d}B_s - H_0\Big|^{1/4}\Big\} \le \Big[\mathbb{E}\{\frac{1}{|B_\varepsilon|^{1/2}}\}\Big]^{1/2}\Big[\mathbb{E}\{|M_\varepsilon|^{1/2}\}\Big]^{1/2} = c\,\frac{[\mathbb{E}\{|M_\varepsilon|^{1/2}\}]^{1/2}}{\varepsilon^{1/8}},$$

où $c := [\,\mathbb{E}\{\frac{1}{|B_1|^{1/2}}\}]^{1/2} < \infty$.

Il reste de vérifier que $\frac{\mathbb{E}\{|M_\varepsilon|^{1/2}\}}{\varepsilon^{1/4}} \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Considérons la martingale locale continue $M_t := \int_0^t (H_s - H_0)\,\mathrm{d}B_s$, $t \ge 0$. On a, pour tout $t \ge 0$, $\langle M\rangle_t = \int_0^t (H_s - H_0)^2\,\mathrm{d}s$, et donc $\mathbb{E}(\langle M\rangle_t) = \int_0^t \mathbb{E}[\,(H_s - H_0)^2]\,\mathrm{d}s$ qui est finie (car H est borné). Donc $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ est une (vraie) martingale, et $\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\langle M\rangle_t)$, qui vaut $\mathbb{E}\{\int_0^t (H_s - H_0)^2\,\mathrm{d}s\}$.

Par hypothèse, H est continu au point 0 ; d'où : $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (H_s - H_0)^2\,\mathrm{d}s \to 0$ p.s., lorsque $\varepsilon \to 0$. Comme H est borné, il résulte du théorème de convergence dominée que $\mathbb{E}[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (H_s - H_0)^2\,\mathrm{d}s] \to 0$, c'est-à-dire que $\frac{\mathbb{E}(M_\varepsilon^2)}{\varepsilon} \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

En conséquence, $\frac{\mathbb{E}\{|M_\varepsilon|^{1/2}\}}{\varepsilon^{1/4}} \le \frac{[\mathbb{E}\{|M_\varepsilon|^2\}]^{1/4}}{\varepsilon^{1/4}} \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Alternativement, on peut vérifier que $\frac{M_\varepsilon}{\varepsilon^{1/2}} \to 0$ en probabilité à l'aide de l'exercice suivant, voire $\frac{M_\varepsilon}{\varepsilon^{1/2}} \to 0$ dans L^2 (donc en probabilité) en utilisant le théorème de Slutsky.□

Exercice 10. (i) Écrivons $N_t := \int_0^t H_s\,\mathrm{d}M_s$, de sorte que $\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = \langle N\rangle_t$. Il suffit de vérifier que

$$\mathbb{P}\{|N_t| \ge a,\ \langle N\rangle_t < b\} \le \frac{b}{a^2}.$$

Soit $\tau := \inf\{t \ge 0 : \langle N\rangle_t \ge b\}$ (avec $\inf\varnothing := \infty$). Comme $\{\langle N\rangle_t < b\} = \{\tau > t\} \subset \{(\tau \wedge t) = t\}$, on a $\mathbb{P}\{|N_t| \ge a,\ \langle N\rangle_t < b\} \le \mathbb{P}\{|N_{t\wedge\tau}| \ge a\} \le \frac{\mathbb{E}(N_{t\wedge\tau}^2)}{a^2}$.

Or, N^τ étant une martingale locale continue avec $\langle N^\tau\rangle_\infty = \langle N\rangle_\tau \le b$ et donc $\mathbb{E}(\langle N^\tau\rangle_\infty) < \infty$: c'est une (vraie) martingale continue bornée dans L^2. D'après le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}(N_{t\wedge\tau}^2) = \mathbb{E}(\langle N\rangle_{t\wedge\tau}) \le b$ (car $\langle N\rangle_{t\wedge\tau} \le b$). D'où l'inégalité désirée.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $t \ge 0$. Soit $\delta > 0$. Par hypothèse, $\int_0^t (H_s^n - H_s)^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \to 0$ en probabilité ; donc $\mathbb{P}\{\int_0^t (H_s^n - H_s)^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \ge \varepsilon\delta^2\} \to 0$ quand $n \to \infty$. D'après (i), $\mathbb{P}\{\,|\int_0^t (H_s^n - H_s)\,\mathrm{d}M_s| \ge \delta\} \le \{\int_0^t (H_s^n - H_s)^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \ge \varepsilon\delta^2\} + \varepsilon$. On a donc

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\,|\int_0^t (H_s^n - H_s)\,\mathrm{d}M_s| \ge \delta\} \le \varepsilon.$$

Par conséquent, $\int_0^t H_s^n\,\mathrm{d}M_s \to \int_0^t H_s\,\mathrm{d}M_s$ en probabilité. □

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.
Feuille 6.
Solutions

Exercice 1. On voit que β et γ sont des martingales locales continues, issues de 0, avec $\langle \beta \rangle_t = \langle \gamma \rangle_t = t$ et $\langle \beta, \gamma \rangle_t = 0$. Par le théorème de Lévy, il s'agit d'un couple de $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens indépendants. $\square$

Exercice 2. (i) On a (en probabilité)

$$\begin{aligned}
\int_0^t Y_s \, \mathrm{d}X_s &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} Y_{t_i^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}), \\
\frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} \frac{Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}}{2} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}).
\end{aligned}$$

En sommant les deux identités, on obtient le résultat voulu.

(ii) On applique la formule d'Itô aux fonctions F et F' respectivement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F(X_t) &= F'(X_t) \, \mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} F''(X_t) \, \mathrm{d}\langle X \rangle_t \, , \\
\mathrm{d}F'(X_t) &= F''(X_t) \, \mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} F'''(X_t) \, \mathrm{d}\langle X \rangle_t \, .
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{d}\langle F'(X), \, X \rangle_t = F''(X_t) \, \mathrm{d}\langle X \rangle_t$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
F'(X_t) \circ \mathrm{d}X_t &= F'(X_t) \, \mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} \mathrm{d}\langle F'(X), \, X \rangle_t \\
&= F'(X_t) \, \mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} F''(X_t) \, \mathrm{d}\langle X \rangle_t \\
&= \mathrm{d}F(X_t),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Exercice 3. Soit $M_t := \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s=0\}} \, \mathrm{d}B_s$, qui est une martingale locale continue, avec $\langle M \rangle_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s=0\}} \, \mathrm{d}s$. Par Fubini, $\mathbb{E}(\langle M \rangle_t) = \int_0^t \mathbb{P}\{B_s = 0\} \, \mathrm{d}s = 0$, et donc $\langle M \rangle_t = 0$. Par conséquent, M est indistinguable de 0. $\square$

Exercice 4. **(i)** Il suffit d'appliquer la formule d'Itô.

(ii) Pas si facile mais élémentaire, utiliser que $B_t \sim \mathcal{N}(x_0, I)$.

(iii) On a donc $\mathbb{E}(M_t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$: M ne peut donc être une martingale, sinon, comme elle est UI, on aura $M_t = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t]$ avec ici $M_\infty = 0$, ce qui est absurde. $\square$

Exercice 5. Sans perte de généralité, on suppose que $f \geq 0$. (Sinon, on considèrera f^+ et f^- séparément.) Comme f est à support compact, soit $M > x$ tel que $f(y) = 0$ pour tout $y \geq M$. Soit

$$G(y) := \int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^M f(u)\,\mathrm{d}u, \qquad y \geq 0,$$

alors $G(y) = 0$ pour tout $y \geq M$. On pose $F(z) := \int_0^z G(y)\,\mathrm{d}y$, $z \in \mathbb{R}_+$. Alors F est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ de classe C^2 telle que $F' = G$ et $F'' = f$. Par la formule d'Itô,

$$F(B_{t\wedge T}) = F(x) + \int_0^{t\wedge T} G(B_s)\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T} f(B_s)\,\mathrm{d}s.$$

Remarquons que $M_t := \int_0^{t\wedge T} G(B_s)\,\mathrm{d}B_s$ est une martingale locale continue issue de 0, telle que $\langle M\rangle_t = \int_0^{t\wedge T} G^2(s)\,\mathrm{d}s$. Pour tout t fixé, $\langle M\rangle_t$ est bornée par la constante finie $t\sup_{s\in[0,t]} G^2(s)$ (car G est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$). Donc M est une (vraie) martingale continue, de carré intégrable. En particulier, $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0) = 0$. Donc pour tout t,

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big(\int_0^{t\wedge T} f(B_s)\,\mathrm{d}s\Big) = \mathbb{E}[F(B_{t\wedge T})] - F(x).$$

On fait maintenant $t \to \infty$. On utilise la convergence monotone pour le terme de gauche (car $f \geq 0$, et $T < \infty$ p.s.), et la convergence dominée pour le terme de droite (car F est bornée), pour voir que

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big(\int_0^{T} f(B_s)\,\mathrm{d}s\Big) = \mathbb{E}[F(B_T)] - F(x) = F(0) - F(x) = -F(x).$$

Or, $-F(x) = -\int_0^x G(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x \mathrm{d}y \int_y^\infty \mathrm{d}u\, f(u)$, ce qui implique, par le théorème de Fubini, que $\mathbb{E}[\int_0^T f(B_s)\,\mathrm{d}s] = 2\int_0^\infty (x\wedge u) f(u)\,\mathrm{d}u$. $\square$

Exercice 6. Si B est un mouvement brownien, alors $\frac{B_t}{t} \to 0$ p.s. lorsque $t \to \infty$. L'hypothèse $\langle M\rangle_\infty = \infty$ p.s. implique donc que $\frac{M_t}{\langle M\rangle_t} \to 0$ p.s. (par Dubins–Schwarz). D'où $\mathscr{E}(M)_t = \exp[M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t] = \exp[(\frac{M_t}{\langle M\rangle_t} - \frac{1}{2})\langle M\rangle_t] \to 0$ p.s. Par conséquent, $\mathscr{E}(M)_\infty = 0$.

Si $\mathscr{E}(M)$ était une martingale uniformément intégrable, alors on aurait, par le théorème d'arrêt, $\mathscr{E}(M)_t = \mathbb{E}[\mathscr{E}(M)_\infty \,|\, \mathscr{F}_t] = 0$, $\forall t$, ce qui serait absurde. $\square$

Exercice 7. (Unicité) Soit N une martingale locale continue telle que $\mathscr{E}(N) = \mathscr{E}(M)$. Alors $M - N = \frac{\langle M\rangle - \langle N\rangle}{2}$. Il découle que $M - N$ est une martingale locale continue issue de 0 (car $M_0 = N_0 = \log D_0$), qui est à variation finie. Donc $M = N$.

(Existence) Soit $M_t := \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1}\,\mathrm{d}D_s$, qui est une martingale locale continue. Comme D est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer la formule d'Itô à $F(D_t)$, où $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie par $F(x) = \log x$. Il en découle que

$$\log D_t = \log D_0 + \int_0^t \frac{\mathrm{d}D_s}{D_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\langle D\rangle_s}{D_s^2} = M_t - \frac{1}{2}\,\langle M\rangle_t.$$

Autrement dit, $D = \mathscr{E}(M)$. $\square$

Exercice 8. **(i)** Pour tout t, $|V_t| \le \int_0^t |\mathrm{d}V_s| \le K$, et donc $|M_t| \le |X_t| + |X_0| + |V_t| \le 3K$. Par conséquent, M est une (vraie) martingale continue bornée dans L^2, issue de 0, c'est à dire $M \in \mathscr{M}^2$. Comme l'intégrand $\mathrm{sgn}(X_s - x)$ est borné, on sait que $N_t := \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s - x)\,\mathrm{d}M_s \in \mathscr{M}^2$. En particulier, elle est uniformément intégrable. Donc $Y(x) = \lim_{t\to\infty} N_t$ est bien définie.

(ii) D'après l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\,|Y(x) - Y(y)|^p] &\le \mathbb{E}\Big[\sup_{t\ge 0}\Big|\int_0^t [\mathrm{sgn}(X_s - x) - \mathrm{sgn}(X_s - y)]\,\mathrm{d}M_s\Big|^p\Big] \\
&= 2^p\,\mathbb{E}\Big[\sup_{t\ge 0}\Big|\int_0^t \mathbf{1}_{\{x<X_s\le y\}}\,\mathrm{d}M_s\Big|^p\Big] \\
&\le C_p\,\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x<X_s\le y\}}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\Big)^{p/2}\Big].
\end{aligned}$$

(iii) L'existence d'une telle fonction g ne pose pas de problème : il suffit de définir la fonction continue $h :\ \mathbb{R} \to [0,1]$ par

$$h(u) := (1+u)\,\mathbf{1}_{[-1,0[}(u) + \mathbf{1}_{[0,1]}(u) + (2-u)\,\mathbf{1}_{]1,2]}(u),$$

et de poser $g(u) := \int_{-\infty}^u h(v)\,\mathrm{d}v$. On voit que g est de classe C^1, positive et croissante, telle que $g(\infty) = g(2) = 2$. Bien sûr, $g'(u) = h(u) \ge \mathbf{1}_{]0,1]}(u)$.

Par la définition de φ, on a $\mathbf{1}_{]x,y]}(u) \le (y-x)^2\varphi''(u)$. Donc, si l'on note la variable aléatoire $\xi := \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x<X_s\le y\}}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$, alors d'après la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
\xi &\le (y-x)^2 \int_0^\infty \varphi''(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \\
&= 2(y-x)^2\Big(\varphi(X_\infty) - \varphi(X_0) - \int_0^\infty \varphi'(X_s)\,\mathrm{d}X_s\Big) \\
&\le 2(y-x)^2|\varphi(X_\infty) - \varphi(X_0)| + 2(y-x)^2\Big|\int_0^\infty \varphi'(X_s)\,\mathrm{d}M_s\Big| \\
&\qquad +2(y-x)^2\int_0^\infty |\varphi'(X_s)|\cdot|\mathrm{d}V_s|.
\end{aligned}$$

(iv) Puisque $0 \le \varphi'(u) \le \frac{2}{y-x}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a, d'une part,

$$2(y-x)^2|\varphi(X_\infty) - \varphi(X_0)| \le 4(y-x)|X_\infty - X_0| \le 8K(y-x),$$

et d'autre part,

$$2(y-x)^2 \int_0^\infty |\varphi'(X_s)| \cdot |\mathrm{d}V_s| \le 4(y-x) \int_0^\infty |\mathrm{d}V_s| \le 4K(y-x).$$

D'où l'inégalité cherchée.

(v) Par l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy, il existe des constantes C_p et $\widetilde{C}_p$ telles que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi^{p/2}) &\le C_p\,(y-x)^{p/2}\Big[1 + \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty (g(\frac{X_s - x}{y-x}))^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\Big)^{p/4}\Big] \\
&\le C_p\,(y-x)^{p/2}\Big[1 + 2^{p/2}\mathbb{E}(\langle M\rangle_\infty^{p/4})\Big] \qquad (\text{car } |g(u)| \le 2) \\
&\le C_p\,(y-x)^{p/2}\Big[1 + \widetilde{C}_p\,\mathbb{E}\Big(\sup_{t\ge 0}|M_t|^{p/2}\Big)\Big] \qquad (\text{BDG}) \\
&\le C_p\,(y-x)^{p/2}[1 + \widetilde{C}_p\,K^{p/2}].
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité cherchée.

(vi) Il suffit de choisir $p > 2$ pour appliquer le critère de Kolmogorov : il existe donc une version continue du processus $x \mapsto Y(x)$. □

Exercice 9. (i) Il suffit de vérifier par définition.

(ii) Comme $(u(t),\, t \ge 0)$ est une semimartingale continue, il résulte de la formule d'intégration par parties que $u(t)X_t = u(0)x_0 + \int_0^t u'(s)\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t X_s u'(s)\,\mathrm{d}s$. Il ne reste plus que de remarquer, d'après la question (i), que $X_s u'(s) - g(s)X_s = -2u(s)^2 X_s$.

(iii) Posons $Y_t := u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\,\mathrm{d}s = u(0)x_0 + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}X_s - 2\int_0^t u(s)^2 X_s\,\mathrm{d}s$, et $Z_t := f(t)^{-a/2}\mathrm{e}^{Y_t}$, $t \ge 0$. Par intégration par parties, $Z_t = -\frac{a}{2}\frac{f't)}{f(t)} Z_t\,\mathrm{d}t + f(t)^{-a/2}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{Y_t}) = -au(t)Z_t\,\mathrm{d}t + f(t)^{-a/2}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{Y_t})$. Or, par la formule d'Itô, $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{Y_t}) = \mathrm{e}^{Y_t}\,\mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{Y_t}\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_t$. D'où

$$Z_t = -au(t)Z_t\,\mathrm{d}t + Z_t\,\mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2}Z_t\,\mathrm{d}\langle Y\rangle_t$$

Rappelons que $\mathrm{d}Y_t = u(t)\,\mathrm{d}X_t - 2u(t)^2X_t\,\mathrm{d}t$, et $\mathrm{d}\langle Y\rangle_t = u(t)^2\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t = 4u(t)^2X_t\,\mathrm{d}t$; d'où

$$\begin{aligned}
Z_t &= -au(t)Z_t\,\mathrm{d}t + u(t)Z_t\,\mathrm{d}X_t - 2u(t)^2X_tZ_t\,\mathrm{d}t + 2u(t)^2X_tZ_t\,\mathrm{d}t \\
&= -au(t)Z_t\,\mathrm{d}t + u(t)Z_t\,\mathrm{d}X_t \\
&= 2u(t)Z_t\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}t \\
&= Z_t\,\mathrm{d}M_t,
\end{aligned}$$

où $M_t := u(0)x_0 + 2\int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\,\mathrm{d}\beta_s$, $t \geq 0$. Comme $Z_0 = \mathrm{e}^{Y_0} = \mathrm{e}^{u(0)x_0} = \mathrm{e}^{M_0}$, ceci implique que $Z = \mathscr{E}(M)$.

(iv) Comme $f'' = 2gf \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, et $f'(1) = 0$, on a $f' \leq 0$ sur $[0, 1]$: d'où la décroissance de f sur $[0, 1]$.

D'après (iii), Z est une martingale local continue (et positive). Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $Z_t = f(t)^{-a/2}\mathrm{e}^{u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\,\mathrm{d}s} \leq f(1)^{-a/2}$ (car $u = \frac{f'}{2f} \leq 0$ sur $[0, 1]$, et X est un processus positif) ; donc Z est borné sur $[0, 1]$. Par conséquent, $(Z_t,\ t \in [0, 1])$ est une martingale. En particulier, $\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{E}(Z_0) = \mathrm{e}^{u(0)x_0} = \mathrm{e}^{x_0 f'(0)/2}$. Il suffit alors de remarquer que $Z_1 = f(1)^{-a/2}\exp(-\int_0^1 g(s)X_s\,\mathrm{d}s)$, car $u(1) = 0$.

(v) Il n'y a rien à démontrer si $\theta = 0$. On suppose donc $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Par symétrie, on suppose que $\theta > 0$.

On prend $g(s) := \frac{\theta^2}{2}$, $s \geq 0$. L'équation $f'' = 2gf$ a pour solution $f(t) = a\mathrm{sh}(\theta t) + b\mathrm{ch}(\theta t)$, $t \geq 0$. La condition $f(0) = 1$ donne $b = 1$, et la condition $f'(1) = 0$ entraîne que $a\theta\mathrm{ch}\theta + b\theta\mathrm{sh}\theta = 0$, c'est-à-dire $a = -\mathrm{th}\theta$. On prend donc $f(t) := \mathrm{ch}(\theta t) - (\mathrm{th}\theta)\mathrm{sh}(\theta t)$, $t \geq 0$, qui est bien de classe C^2 et à valeurs strictement positives[1] sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, $f(1) = \frac{1}{\mathrm{ch}\theta}$ et $f'(0) = -\theta\mathrm{th}\theta$. Ceci implique que $f(1)^{a/2}\mathrm{e}^{x_0 f'(0)/2} = \frac{1}{(\mathrm{ch}\theta)^{a/2}}\exp(-\frac{x_0}{2}\,\theta\mathrm{th}\theta)$.

(vi) Soient B et $\widetilde{B}$ des $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens standard indépendants. Soit $X_t := (B_t + x)^2 + (\widetilde{B}_t + x)^2$, $t \geq 0$. Par la formule d'Itô, $X_t = 2x^2 + 2\int_0^t (B_s + x)\,\mathrm{d}B_s + 2\int_0^t (\widetilde{B}_s + x)\,\mathrm{d}\widetilde{B}_s + 2t = 2x^2 + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\,\mathrm{d}\beta_s + 2t$, où $\beta_t := \int_0^t \frac{B_s + x}{X_s^{1/2}}\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t \frac{\widetilde{B}_s + x}{X_s^{1/2}}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_s$. Comme β est une martingale locale continue avec $\beta_0 = 0$ et $\langle \beta \rangle_t = \int_0^t \frac{(B_s+x)^2}{X_s}\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{(\widetilde{B}_s+x)^2}{X_s}\,\mathrm{d}s = t$, le théorème de Lévy nous dit que β est un $(\mathscr{F})_t$-mouvement brownien standard. On peut donc utiliser le résultat prouvé dans (v), avec $a = 2$ et $x_0 = 2x^2$, pour voir que

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 X_s\,\mathrm{d}s\Big)\Big] = \frac{1}{\mathrm{ch}\theta}\exp\Big(-x^2\,\theta\mathrm{th}\theta\Big), \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Or, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 X_s\,\mathrm{d}s}] = \{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 (B_s+x)^2\,\mathrm{d}s}]\}^2$, ce qui donne le résultat cherché.

Exercice 10. Par définition, pour $t < 1$, $M_t = F(t, B_t)$, où

$$F(t,x) = \mathbb{E}[\,f(B_{1-t} + x)\,] = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u)}{\sqrt{2\pi(1-t)}}\exp\Big(-\frac{(u-x)^2}{2(1-t)}\Big)\,\mathrm{d}u.$$

La formule d'Itô entraîne que

$$F(t, B_t) = F(0,0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s)\,\mathrm{d}B_s.$$

[1] Car $\mathrm{ch}x > \mathrm{sh}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

[A priori, on savait que $F(t, B_t)$ est une martingale, donc on n'a pas à calculer les termes à variation finie.] Par conséquent, $c = F(0,0) = \mathbb{E}[f(B_1)]$ et $H_s = \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(u-B_s)f(u)}{\sqrt{2\pi(1-t)^3}} \exp(-\frac{(u-B_s)^2}{2(1-t)})\, \mathrm{d}u$. $\square$

Exercice 11. Considérons la martingale locale continue $L := B^T$. On a $\langle L\rangle_\infty = T$. Par hypothèse, $\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty)] < \infty$. D'après un théorème du cours (théorème de Novikov), $\mathscr{E}(L)$ est une (vraie) martingale uniformément intégrable : $\mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_\infty] = 1$. D'où la conclusion. $\square$

Exercice 12. **(i)** La mesure $\mathrm{d}S_t$ étant portée par $\{t:\ B_t = S_t\}$, on a $\mathrm{d}S_t = \mathbf{1}_{\{B_t=S_t\}}\, \mathrm{d}S_t = \mathbf{1}_{\{X_t=0\}}\, \mathrm{d}S_t$. Donc $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_u\neq 0\}}\, \mathrm{d}S_u = 0$.

(ii) Le processus X étant une semimartingale continue, on applique la formule d'Itô pour voir que $\mathrm{d}Y_t = 2X_t\, \mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle X\rangle_t - \mathrm{d}t = 2X_t\, \mathrm{d}S_t - 2X_t\, \mathrm{d}B_t$. Par (i), $X_t\, \mathrm{d}S_t = X_t \mathbf{1}_{\{X_u\neq 0\}}\, \mathrm{d}S_t = 0$, on déduit que Y est une martingale locale.

(iii) Pour tout t, $\sup_{s\in[0,t]} X_s^2 \leq 2(S_t)^2 + 2\sup_{s\in[0,t]} B_s^2$ qui est intégrable. Par conséquent, $\mathbb{E}(\sup_{s\in[0,t]} |Y_s|) < \infty$. En particulier, Y est une martingale.

Il est clair que $\tau < \infty$ p.s. D'après (iii) et le théorème d'arrêt, pour tout t, $\mathbb{E}(X_{t\wedge\tau}^2) = \mathbb{E}(t\wedge\tau)$. En fait $t\to\infty$. Par convergence dominée, $\mathbb{E}(X_{t\wedge\tau}^2) \to \mathbb{E}(X_\tau^2) = 1$, tandis que par convergence monotone, $\mathbb{E}(t\wedge\tau) \to \mathbb{E}(\tau)$. En conclusion, $\mathbb{E}(\tau) = 1$. $\square$

Exercice 13. **(i)** Evident, car le processus $B_t + \gamma_t$ est continu, part de 0 et tend vers l'infini (car $\gamma > 0$) p.s.

(ii) Considérons la martingale $L_t = \gamma B_t$, on a alors $\mathscr{E}(L)_t = \mathrm{e}^{\gamma B_t - \gamma^2 t/2}$ qui est une vraie martingale par Novikov (car pour tout $t > 0$, $\langle L\rangle_t = \gamma^2 t$ est déterministe et donc bien sûr, $\mathbb{E}[e^{\langle L\rangle_t/2}] < \infty$).

Fixons $T > 0$ (qu'on fera tendre vers l'infini plus tard). Sous $\mathbb{Q} = \mathscr{E}(L)_T \cdot \mathbb{P}$ (sur $\mathscr{F}_T$), $\tilde{B}_t = B_t - \langle B, L\rangle_t = B_t - \gamma t$ est un $\mathbb{Q}$ mouvement brownien (sur $[0,T]$). De plus, en notant

$$\tilde{T}_a^\gamma = \inf\{t \geq 0 : \tilde{B}_t + \gamma t = a\},$$

on a bien sûr $\tilde{T}_a^\gamma = T_a^0$. Ainsi, en utilisant que $\tilde{B}$ sous $\mathbb{Q}$ a la même loi que B sous $\mathbb{P}$, on écrit

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda(T_a^\gamma\wedge T)}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\lambda(\tilde{T}_a^\gamma\wedge T)}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\lambda(T_a^0\wedge T)}] = \mathbb{E}[e^{-\lambda(T_a^0\wedge T)}\mathrm{e}^{\gamma B_T - \gamma^2 T/2}].$$

En utilisant le théorème d'arrêt (se rappeler que $\mathrm{e}^{\gamma B_t - \gamma^2 t/2}$ est une martingale), on conclut que

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda(T_a^\gamma\wedge T)}] = \mathbb{E}[e^{-\lambda(T_a^0\wedge T)}\mathrm{e}^{\gamma B_{T_a^0\wedge T} - \gamma^2(T_a^0\wedge T)/2}]$$

puis, en faisant tendre $T \to \infty$ par convergence dominée,

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda T_a^\gamma}] = \mathbb{E}[e^{-\lambda T_a^0} \mathrm{e}^{\gamma B_{T_a^0} - \gamma^2 T_a^0/2}] = \mathbb{E}[e^{-\lambda T_a^0} \mathrm{e}^{\gamma a - \gamma^2 T_a^0/2}].$$

On conclut en se rappelant, voir le cours, que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda T_a^0}] = \mathrm{e}^{-|a|\sqrt{2\lambda}}$.

Exercice 14. Soit $L_t := \int_0^t f(s) H_s \,\mathrm{d}B_s$, qui est une martingale locale continue. On a $\langle L\rangle_\infty = \int_0^\infty f^2(t) H_t^2 \,\mathrm{d}t \le C^2 \int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty$; donc $\mathbb{E}[\exp(\frac12 \langle L\rangle_\infty)] < \infty$. D'après un théorème du cours (théorème de Novikov), $\mathscr{E}(L)$ est une (vraie) martingale uniformément intégrable. En particulier, $1 = \mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_\infty] = \mathbb{E}[\exp(\int_0^\infty f(t) H_t \,\mathrm{d}B_t - \frac12 \langle L\rangle_\infty)]$. Puisque $c^2 \int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t \le \langle L\rangle_\infty \le C^2 \int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t$, les inégalités cherchées s'en suivent. □

Exercice 15.

(a) L'indépendance est claire si $\gamma = 0$. En effet, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, par la symétrie du mouvement brownien (en remplaçant B par $-B$), on a $\mathbb{E}[f(\tau_0)\,\mathbf{1}_{\{B_{\tau_0}=1\}}] = \mathbb{E}[f(\tau_0)\,\mathbf{1}_{\{B_{\tau_0}=-1\}}]$, et donc

$$\mathbb{E}[f(\tau_0)\,\mathbf{1}_{\{B_{\tau_0}=1\}}] = \frac12 \mathbb{E}[f(\tau_0)] = \mathbb{P}(B_{\tau_0} = 1)\mathbb{E}[f(\tau_0)].$$

(b) On suppose maintenant $\gamma > 0$ et on introduit $L_t = \gamma B_t$, on a alors $\mathscr{E}(L)_t = \mathrm{e}^{\gamma B_t - \gamma^2 t/2}$ qui est une vraie martingale par Novikov (car pour tout $t > 0$, $\langle L\rangle_t = \gamma^2 t$ est déterministe et donc bien sûr, $\mathbb{E}[e^{\langle L\rangle_t/2}] < \infty$).

Fixons $T > 0$ (qu'on fera tendre vers l'infini plus tard). Sous $\mathbb{Q} = \mathscr{E}(L)_T \cdot \mathbb{P}$ (sur $\mathscr{F}_T$), $\tilde{B}_t = B_t - \langle B, L\rangle_t = B_t - \gamma t$ est un $\mathbb{Q}$ mouvement brownien (sur $[0, T]$). De plus, en notant

$$\tilde{\tau}_\gamma = \inf\{t \ge 0 : |\tilde{B}_t + \gamma t| = 1\},$$

on a bien sûr $\tilde{\tau}_\gamma = \tau_0$. On peut donc écrire, si ϕ et ψ sont continues bornées,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(\tau_\gamma \wedge T)\psi(B_{\tau_\gamma\wedge T} + \gamma(\tau_\gamma \wedge T))] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(\tilde{\tau}_\gamma \wedge T)\psi(\tilde{B}_{\tilde{\tau}_\gamma\wedge T} + \gamma(\tilde{\tau}_\gamma \wedge T))] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(\tau_0 \wedge T)\psi(B_{\tau_0\wedge T})]\end{aligned}$$

puis, en se rappelant la définition de $\mathbb{Q}$ et en utilisant le théorème d'arrêt,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(\tau_\gamma \wedge T)\psi(B_{\tau_\gamma} + \gamma\tau_\gamma)] &= \mathbb{E}[\phi(\tau_0 \wedge T)\psi(B_{\tau_0\wedge T})\mathrm{e}^{\gamma B_T - \gamma^2 T/2}] \\ &= \mathbb{E}[\phi(\tau_0 \wedge T)\psi(B_{\tau_0\wedge T})\mathrm{e}^{\gamma B_{\tau_0\wedge T} - \gamma^2(\tau_0\wedge T)/2}]\end{aligned}$$

En faisant tendre $T \to \infty$ par convergence dominée puis en utilisant (a), on conclut que

$$\mathbb{E}[\phi(\tau_\gamma)\psi(B_{\tau_\gamma} + \gamma\tau_\gamma)] = \mathbb{E}[\phi(\tau_0)\psi(B_{\tau_0})\mathrm{e}^{\gamma B_{\tau_0} - \gamma^2\tau_0/2}] = \mathbb{E}[\phi(\tau_0)\mathrm{e}^{-\gamma^2\tau_0/2}]\mathbb{E}[\psi(B_{\tau_0})\mathrm{e}^{\gamma B_{\tau_0}}] \quad (*)$$

On conclut aisément que $\mathbb{E}[\phi(\tau_\gamma)\psi(B_{\tau_\gamma} + \gamma\tau_\gamma)] = \mathbb{E}[\phi(\tau_\gamma)]\mathbb{E}[\psi(B_{\tau_\gamma} + \gamma\tau_\gamma)]$ (choisir $\phi = 1$ dans $(*)$ pour calculer $\mathbb{E}[\psi(B_{\tau_\gamma} + \gamma\tau_\gamma)]$, etc.).

Exercice 16. On pose $L_t := \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}B_s$, $t \in [0,1]$. Alors $(\mathscr{E}(L)_t;\, t \in [0,1])$ est une vraie martingale uniformément intégrable car $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_1}$ est intégrable (il s'agit d'une constante finie). Soit $\mathbb{Q} := \mathscr{E}(L)\cdot\mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_1$. Le théorème de Girsanov dit que $(B_t - \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s,\ t \in [0,1])$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien, c'est à dire que $B - f$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,\,1]} |B_t + f(t)| \le x\Big) &= \mathbb{Q}\Big(\sup_{t\in[0,\,1]} |B_t| \le x\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big\{\mathbf{1}_{\{\sup_{t\in[0,\,1]} |B_t| \le x\}}\, \mathrm{e}^{\int_0^1 f'(s)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(s))^2\,\mathrm{d}s}\Big\}.
\end{aligned}$$

Par intégration par parties, $\int_0^1 f'(s)\,\mathrm{d}B_s = f'(1)B_1 - \int_0^1 B_s f''(s)\,\mathrm{d}s$. Donc, sur l'ensemble $\{\sup_{t\in[0,\,1]} |B_t| \le x\}$, on a $|\int_0^1 f'(s)\,\mathrm{d}B_s| \le x(|f'(1)| + \int_0^1 |f''(s)|\,\mathrm{d}s) = ax$. D'où l'inégalité cherchée. $\square$

Exercice 17. **(i)** Il s'agit de montrer que $f(t,B_t) = 1 + \int_0^t f(s,B_s)\,\mathrm{d}L_s$, i.e. que $f(t,B_t) = 1 + \int_0^t g(s,B_s)\,\mathrm{d}B_s$. Cela découle de la formule d'Itô, en remarquant que $\partial_t f(t,x) + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,x) = 0$ et que $\partial_x f(t,x) = g(t,x)$.

(ii) La martingale locale $\mathscr{E}(L)$ est une vraie martingale L^2 car $\mathscr{E}(L)_t = 1 + \int_0^t g(s,B_s)\,\mathrm{d}B_s$ (voir (i)) et car (par indépendance entre U et B)

$$\mathbb{E}[g^2(s,B_s)] = \mathbb{E}[U^2\mathrm{e}^{-sU^2 + 2B_sU}] = \mathbb{E}[U^2\mathrm{e}^{-sU^2 + 2sU^2}] = \mathbb{E}[U^2\mathrm{e}^{sU^2}]$$

est bornée sur $[0,1]$ par hypothèse. On a donc le droit d'appliquer Girsanov : $B_t - \langle B, L\rangle_t = B_t - \int_0^t h(s,B_s)\,\mathrm{d}s$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien, où $\mathbb{Q} = \mathscr{E}(L)_1\cdot\mathbb{P} = f(1,B_1)\cdot\mathbb{P}$ (sur $\mathscr{F}_1$).

(iii) Par Girsanov, pour tout $u \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mathbb{E}\{F(B_t + tu,\, t \in [0,\,1])\} = \mathbb{E}\{\mathrm{e}^{uB_1 - u^2/2}\, F(B_t,\, t \in [0,\,1])\}.$$

En utilisant maintes fois l'indépendance entre U et B, on conclut que

$$\mathbb{E}\{F(B_t + tU,\, t \in [0,\,1])\} = \mathbb{E}\{\mathrm{e}^{UB_1 - U^2/2}\, F(B_t,\, t \in [0,\,1])\} = \mathbb{E}\{f(1,B_1)\, F(B_t,\, t \in [0,\,1])\},$$

donc $\mathbb{E}\{F(\xi_t,\, t \in [0,\,1])\} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{F(B_t,\, t \in [0,\,1])\}$.

Ainsi, ξ sous $\mathbb{P}$ a la même loi que B sous Q, donc $(\xi_t - \int_0^t h(s,\xi_s)\,\mathrm{d}s, s \in [0,1])$ sous $\mathbb{P}$ a la même loi que $(B_t - \int_0^t h(s,B_s)\,\mathrm{d}s, s \in [0,1])$ sous $\mathbb{Q}$. C'est donc un mouvement brownien par (ii).

(iv) Il s'agit de montrer que pour tout F mesurable bornée, $\mathbb{E}[UF(\xi_t, t \in [0,1])] = \mathbb{E}[h(1,\xi_1)F(\xi_t, t \in [0,1])]$.

Exactement comme au (iii),

$$\mathbb{E}\{uF(B_t + tu,\, t \in [0,\, 1])\} = \mathbb{E}\{u\mathrm{e}^{uB_1 - u^2/2}\, F(B_t,\, t \in [0,\, 1])\}$$

puis, par indépendance entre U et B,

$$\mathbb{E}\{UF(B_t + tU,\, t \in [0,\, 1])\} = \mathbb{E}\{U\mathrm{e}^{UB_1 - U^2/2}\, F(B_t,\, t \in [0,\, 1])\} = \mathbb{E}\{g(1, B_1)\, F(B_t,\, t \in [0,\, 1])\}.$$

Donc

$$\mathbb{E}\{UF(\xi_t,\, t \in [0,\, 1])\} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{h(1, B_1)F(B_t,\, t \in [0,\, 1])\}.$$

Mais nous avons vu au (iii) que la loi de ξ sous $\mathbb{P}$ égale la loi de B sous $\mathbb{Q}$, d'où

$$\mathbb{E}\{UF(\xi_t,\, t \in [0,\, 1])\} = \mathbb{E}\{h(1, \xi_1)F(\xi_t,\, t \in [0,\, 1])\}.$$

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Calcul stochastique.

Feuille 7.

Solutions.

Exercice 1. Soient $\sigma(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $b(x) = \frac{x}{2}$ qui sont continues et lipschitziennes ; il y a donc unicité trajectorielle. Or, le processus qui est identiquement nul est de toute évidence une solution. On déduit que $X_t = 0$, $t \geq 0$, est l'unique solution. $\square$

Exercice 2. (i) Posons $Y_t := s(X_t)$. Par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= s'(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\,s''(X_t)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t \\
&= s'(X_t)\sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t + \Big(s'(X_t)b(X_t) + \frac{1}{2}\,s''(X_t)\sigma^2(X_t)\Big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme $s'b + \frac{1}{2}s''\sigma^2 = 0$, on a $\mathrm{d}Y_t = s'(X_t)\sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t$. Donc Y est une martingale locale continue, et $\langle Y\rangle_t = \int_0^t (s'(X_u)\sigma(X_u))^2\,\mathrm{d}u$.

(ii) Par le théorème de Dambis–Dubins–Schwarz, il existe un mouvement brownien β issu de $s(x)$ tel que $s(X_t) = \beta_{\langle Y\rangle_t}$. Si $\omega \in \{T_{a,b} = \infty\}$, on a $X_t \in [a,b]$ pour tout $t \geq 0$, donc $\langle Y\rangle_\infty = \int_0^\infty (s'(X_u)\sigma(X_u))^2\,\mathrm{d}u = \infty$, ce qui contredit l'identité $s(X_t) = \beta_{\langle Y\rangle_t}$ (car le terme à gauche est borné, mais pas le terme à droite). Par conséquent, $T_{a,b} < \infty$ p.s.

Si l'on note $H_y := \inf\{t \geq 0 : B_t = y\}$, alors

$$\mathbb{P}^x(X_{T_{a,b}} = a) = \mathbb{P}^{s(x)}(H_{s(a)} < H_{s(b)}) = \frac{s(b)-s(x)}{s(b)-s(a)}.$$

De même, $\mathbb{P}^x(X_{T_{a,b}} = b) = \frac{s(x)-s(a)}{s(b)-s(a)}$. $\square$

Exercice 3. Soient $\sigma(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $b(x) = x/2$ qui sont continues et lipschitziennes; il y a donc unicité trajectorielle. On cherche s telle que $s''\sigma^2 + 2s'b = 0$, c'est à dire $\frac{s''(u)}{s'(u)} = -\frac{u}{1+u^2}$. Une solution est $\ln s'(u) = -\frac{1}{2}\ln(1+u^2)$, ou encore $s'(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, ou encore $s(u) = \ln(\sqrt{1+u^2}+u)$. Donc $s(u) := \ln(\sqrt{1+u^2}+u)$ (qui est l'inverse de la fonction $\mathrm{sh}(u)$) est une fonction d'échelle de X.

Par la formule d'Itô, $\mathrm{d}\ln(\sqrt{1+X_t^2}+X_t) = \mathrm{d}B_t$, donc $\ln(\sqrt{1+X_t^2}+X_t) = B_t + \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$. On obtient alors l'unique solution (forte) $X_t = \mathrm{sh}(B_t+y)$, où $y := \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$. $\square$

Exercice 4. **(i)** Par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}(f(X_t)\mathrm{e}^{-\lambda t}) \\
= \ & \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}X_t^i - \lambda f(X_t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\langle X^i,\, X^j\rangle_t \\
= \ & \mathrm{d}(\text{martingale locale}) + (\mathscr{L}f - \lambda f)(X_t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Donc $f(X_t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une martingale locale continue si $\mathscr{L}f = \lambda f$.

(ii) Par la formule d'Itô, $\mathrm{d}X_t = 2\sum_{i=1}^3 B_t^i\,\mathrm{d}B_t^i + 3\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}\beta_t + 3\,\mathrm{d}t$, où $\beta_t := \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{B_s^i}{X_s^{1/2}}\,\mathrm{d}B_s^i$ est un mouvement brownien d'après le critère de Lévy (la définition de β ne pose pas de problème car p.s. X ne s'annule jamais). Donc X est solution de l'EDS $E(\sigma,\, b)$ avec $\sigma(t,\, x) := \sqrt{|x|}$ et $b(t,\, x) := 3$ pour $(t,\, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

(iii) Très pénible.

(iv) Posons $M_t := f(X_t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. D'après les questions précédentes, M est une martingale locale continue, ainsi que M^{T_x}. Or M^{T_x} étant bornée (la fonction $u \mapsto \frac{\mathrm{sh}(u)}{u}$ est évidemment bornée inférieurement sur $\mathbb{R}_+^*$), elle est une (vraie) martingale uniformément intégrable. Il résulte alors du théorème d'arrêt que $f(|a|^2) = \mathbb{E}[f(x)\mathrm{e}^{-\lambda T_x}]$. D'où $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_x}) = \frac{f(|a|^2)}{f(x)}$.

Exercice 5. **(i)** Par définition, $\mathrm{d}\mathscr{E}(Z)_t = \mathscr{E}(Z)_t\,\mathrm{d}Z_t$. Comme $\mathscr{E}(Z)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on applique la formule d'Itô pour voir que

$$\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\mathscr{E}(Z)_t}\Big) = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}(Z)_t}{\mathscr{E}(Z)_t^2} + \frac{\mathrm{d}\langle \mathscr{E}(Z)\rangle_t}{\mathscr{E}(Z)_t^3} = -\frac{\mathrm{d}Z_t}{\mathscr{E}(Z)_t} + \frac{\mathrm{d}\langle Z\rangle_t}{\mathscr{E}(Z)_t}.$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= X_t\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\mathscr{E}(Z)_t}\Big) + \frac{\mathrm{d}X_t}{\mathscr{E}(Z)_t} + \mathrm{d}\Big\langle X, \frac{1}{\mathscr{E}(Z)}\Big\rangle_t \\
&= -\frac{X_t\,\mathrm{d}Z_t}{\mathscr{E}(Z)_t} + \frac{X_t\,\mathrm{d}\langle Z\rangle_t}{\mathscr{E}(Z)_t} + \frac{\mathrm{d}H_t}{\mathscr{E}(Z)_t} + \frac{X_t\,\mathrm{d}Z_t}{\mathscr{E}(Z)_t} - \frac{\mathrm{d}\langle H, Z\rangle_t}{\mathscr{E}(Z)_t} - \frac{X_t\,\mathrm{d}\langle Z\rangle_t}{\mathscr{E}(Z)_t} \\
&= \frac{\mathrm{d}H_t - \mathrm{d}\langle H, Z\rangle_t}{\mathscr{E}(Z)_t}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$X_t = \mathscr{E}(Z)_t Y_t = \mathscr{E}(Z)_t\Big(H_0\mathrm{e}^{-Z_0} + \int_0^t \frac{\mathrm{d}H_s}{\mathscr{E}(Z)_s} - \int_0^t \frac{\mathrm{d}\langle H, Z\rangle_s}{\mathscr{E}(Z)_s}\Big).$$

(ii) Comme les coefficients sont lipschitziens, on sait qu'il y a unicité trajectorielle. Par (i) (avec $H_t := x + B_t$ et $Z_t := -\beta t$), on voit que quel que soit l'espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$

(vérifiant les conditions habituelles) et quel que soit le $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien B, l'unique solution (qui est une solution forte) de l'EDS est $X_t = \mathrm{e}^{-\beta t}(x + \int_0^t \mathrm{e}^{\beta s}\,\mathrm{d}B_s)$. $\square$

Exercice 6. **(i)** Il suffit de remarquer que, pour $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$,

$$\int_{k/n}^t \sigma(X^n_{\tau^n_s})\,\mathrm{d}B_s + \int_{k/n}^t b(X^n_{\tau^n_s})\,\mathrm{d}s = \sigma(X^n_{k/n})(B_t - B_{k/n}) + b(X^n_{k/n})(t - \frac{k}{n}) = X^n_t - X^n_{k/n}.$$

(ii) Pour $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a

$$\begin{aligned} |X^n_t - X^n_{\tau^n_t}| &= |X^n_t - X^n_{k/n}| \\ &\leq |\sigma(X^n_{k/n})(B_t - B_{k/n})| + |b(X^n_{k/n})(t - k/n)| \\ &\leq M|B_t - B_{k/n}| + M(t - k/n). \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}\{[\,X^n_t - X^n_{\tau^n_t}\,]^2\} \leq 2M^2(t - k/n) + 2M^2(t - k/n)^2 \leq \frac{4M^2}{n}$.

(iii) On a, pour $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(X_t - X^n_t)^2\} &\leq 2\mathbb{E}\Big\{[\int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(X^n_{\tau^n_s}))\,\mathrm{d}B_s\,]^2\Big\} + 2\mathbb{E}\Big\{[\int_0^t (b(X_s) - b(X^n_{\tau^n_s}))\,ds\,]^2\Big\} \\ &\leq 2\mathbb{E}\Big\{\int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(X^n_{\tau^n_s}))^2\,\mathrm{d}s\Big\} + 2\mathbb{E}\Big\{\int_0^t (b(X_s) - b(X^n_{\tau^n_s}))^2\,\mathrm{d}s\Big\} \\ &\leq 4K^2\int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X^n_{\tau^n_s})^2\}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X^n_{\tau^n_s})^2\}\,\mathrm{d}s &\leq 2\int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X^n_s)^2\}\,\mathrm{d}s + 2\int_0^t \mathbb{E}\{(X^n_s - X^n_{\tau^n_s})^2\}\,\mathrm{d}s \\ &\leq 2\int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X^n_s)^2\}\,\mathrm{d}s + \frac{8M^2}{n}, \end{aligned}$$

ce qui implique que, pour $0 \leq t \leq 1$, $h(t) \leq C_1 \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s + \frac{C_2}{n}$, où $h(t) := \mathbb{E}\{(X_t - X^n_t)^2\}$. Vu les hypothèses on vérifie facilement que h est bornée sur $[0, 1]$, d'où (lemme de Gronwall) $h(t) \leq \frac{C_2}{n}\exp(C_1 t)$ et $\sup_{t\leq 1} h(t) \leq \frac{C_3}{n}$.

(iv) On a $|f(y) - f(z)| \leq \|f'\|_\infty |y - z|$. Donc $|\mathbb{E}\{f(X^n_1) - f(X_1)\}| \leq \|f'\|_\infty\,\mathbb{E}\{|X_1 - X^n_1|\} \leq \|f'\|_\infty\{\mathbb{E}[\,(X_1 - X^n_1)^2\,]\}^{1/2} \leq \|f'\|_\infty\,\frac{C_4}{\sqrt{n}}$. $\square$

Exercice 7. **(i)** Fixons $t > 0$. Si N suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$, alors $c_\alpha := \mathbb{E}(\frac{1}{|N|^{2\alpha}}) < \infty$: il suffit d'écrire $\mathbb{E}(\frac{1}{|N|^{2\alpha}}) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\frac{1}{|N|^{2\alpha}} > x)\,\mathrm{d}x$ et d'utiliser la condition $2\alpha < 1$. Donc pour tout $s \in [0, t]$, $\mathbb{E}(\frac{1}{|B_s|^{2\alpha}\wedge 1}) \leq \mathbb{E}(\frac{1}{|B_s|^{2\alpha}}) + 1 = \frac{c_\alpha}{s^\alpha} + 1$ (par scaling). Comme

$\int_0^t (\frac{c_\alpha}{s^\alpha}+1)\,\mathrm{d}s<\infty$, il résulte du théorème de Fubini que $\mathbb{E}(Y_t)<\infty$. A fortiori, $Y_t<\infty$ p.s.

La monotonie de $t\mapsto Y_t$ implique que p.s. pour tout t, $Y_t<\infty$.

(ii) Soit $\sigma(x):=|x|^\alpha\wedge 1$. On se donne un espace filtré $(\Omega,\,\mathscr{F},\,(\mathscr{F}_t),\,\mathbb{P})$ (vérifiant les conditions habituelles) et un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien (β_t) issu de 0. On pose $M_t:=\int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{\beta_s\neq 0\}}}{\sigma(\beta_s)}\,\mathrm{d}\beta_s$. Ainsi, $\langle M\rangle_t=\int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{\beta_s\neq 0\}}}{\sigma^2(\beta_s)}\,\mathrm{d}s$. Soit $\tau(t):=\inf\{s\,:\,\langle M\rangle_s>t\}$; alors $B_t:=M_{\tau(t)}$ est un $(\mathscr{F}_{\tau(t)})$-mouvement brownien (par Dubins–Schwarz). Si $X_t:=\beta_{\tau(t)}$, alors $(\Omega,\,\mathscr{F},\,(\mathscr{F}_{\tau(t)}),\,\mathbb{P},\,B,\,X)$ est une solution pour notre EDS, avec $X_0=0$. Pour plus de détails, voir un exemple traité dans le cours, en rappelant que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}\,\mathrm{d}\beta_s=0$.

D'autre part, 0 est évidemment une solution. Il n'y a donc pas d'unicité faible pour cette EDS.

(iii) Si $\alpha\ge 1$, la fonction $x\mapsto |x|^\alpha\wedge 1$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$; il y a alors unicité trajectorielle pour l'EDS. $\square$

Exercice 8. **(i)** Considérons l'EDS $E_1(\sigma,\,b)$, où $\sigma(t,\,x):=\frac{1}{(1+t)(1+|x|)}$ et $b(t,\,x):=-\frac{x}{2}$. Il est clair que σ et b sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, et lipschitziennes en la variable x. Donc, quels que soient l'espace filtré (vérifiant les conditions habituelles) et le mouvement brownien B, il existe une et une seule solution issue de 1, qui est une solution forte.

(ii) Comme X est une (en fait, la) solution forte, le processus est adapté par rapport à la filtration canonique de B.

(iii) Soit $N_t:=\int_0^t \frac{1}{(1+t)(1+|X_s|)}\,\mathrm{d}B_s$, et soit $N_t^*:=\sup_{s\in[0,\,t]}|N_s|$. Remarquons que N est une (vraie) martingale continue, car $\mathbb{E}[\langle N\rangle_t]\le\int_0^t(1+s)^{-2}\,\mathrm{d}s\le 2$. On a $X_t^*\le 1+N_t^*+\frac12\int_0^t X_s^*\,\mathrm{d}s$. En utilisant Doob et Cauchy-Schwarz, on montre que $\mathbb{E}[X_t^*]\le 3+24t+3t\int_0^t\mathbb{E}[X_s^*]\,\mathrm{d}s$, et on conclut avec le lemme de Gronwall que $\mathbb{E}[X_t^*]\le(2+24t)\exp(3t^2)$. (Ce n'est pas parfaitement rigoureux : introduire $\tau_n=\inf\{t\ge 0\,:\,|X_t|\ge n\}$, montrer comme si dessus que $\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau_n}^*]\le 3+24t+3t\int_0^t\mathbb{E}[X_{s\wedge\tau_n}^*]\,\mathrm{d}s$, en déduire par Gronwall que $\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau_n}^*]\le(2+24t)\exp(3t^2)$, puis faire tendre $n\to\infty$)

(iv) Il est clair que Y est adapté, intégrable (d'après (iii)). D'autre part, par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_t &= -\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{e}^{1/(1+t)}(1+X_t^2)\,\mathrm{d}t+2X_t\mathrm{e}^{1/(1+t)}\,\mathrm{d}X_t+\mathrm{e}^{1/(1+t)}\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t\\ &= \frac{2X_t\mathrm{e}^{1/(1+t)}}{(1+t)(1+|X_t|)}\,\mathrm{d}B_t+\mathrm{e}^{1/(1+t)}\Big(\frac{1}{(1+t)^2(1+|X_t|)^2}-\frac{1+X_t^2}{(1+t)^2}-X_t^2\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Décomposition canonique $Y_t=Y_0+M_t+V_t$: $M_t:=\int_0^t\frac{2X_s\mathrm{e}^{1/(1+s)}}{(1+s)(1+|X_s|)}\,\mathrm{d}B_s$ qui est une (vraie) martingale car $\mathbb{E}(\langle M\rangle_t) < \infty$ pour tout t, et $V_t := \int_0^t \mathrm{e}^{1/(1+s)}(\frac{1}{(1+s)^2(1+|X_s|)^2} - \frac{1+X_s^2}{(1+s)^2} - X_s^2)\,\mathrm{d}s$.

Soient $s < t$. On a $V_t - V_s = \int_s^t \mathrm{e}^{1/(1+u)}(\frac{1}{(1+u)^2(1+|X_u|)^2} - \frac{1+X_u^2}{(1+u)^2} - X_u^2)\,\mathrm{d}u \le 0$ (car $\frac{1}{(1+u)^2(1+|X_u|)^2} \le \frac{1+X_u^2}{(1+u)^2}$ si $u \ge 0$). Donc $\mathbb{E}(V_t \,|\, \mathscr{F}_s) \le V_s$ p.s. (remarquons que $V_t = Y_t - Y_0 - M_t$ est intégrable). En conclusion, Y est une surmartingale.

(v) Le processus Y étant une surmartingale positive, on déduit que $\lim_{t\to\infty} Y_t$ existe p.s. (et la limite est p.s. finie), ce qui équivaut à dire que $\lim_{t\to\infty} |X_t|$ existe p.s. (et la limite est p.s. finie).

(vi) On a vu que $V_t \le -\int_0^t \mathrm{e}^{1/(1+s)} X_s^2\,\mathrm{d}s \le -\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s$; d'où $\mathbb{E}(V_t) + \mathbb{E}(\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s) \le 0$.

Comme M est une (vraie) martingale, on a $0 \le \mathbb{E}(Y_t) = 2\mathrm{e} + \mathbb{E}(V_t) \le 2\mathrm{e} - \mathbb{E}(\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s)$. Donc $\mathbb{E}(\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s) \le 2\mathrm{e}$, $\forall t$. Par convergence monotone, $\mathbb{E}(\int_0^\infty X_s^2\,\mathrm{d}s) \le 2\mathrm{e} < \infty$. A fortiori, $\int_0^\infty X_s^2\,\mathrm{d}s < \infty$ p.s.

(vii) Comme $\{\liminf_{t\to\infty} |X_t| > 0\} \subset \{\int_0^\infty X_s^2\,\mathrm{d}s = \infty\}$, il résulte de la question précédente que $\liminf_{t\to\infty} |X_t| = 0$ p.s. D'autre part, d'après (v), $\lim_{t\to\infty} |X_t|$ existe p.s., ce qui implique que $\lim_{t\to\infty} |X_t| = 0$ p.s. Par conséquent, $X_t \to 0$ p.s. quand $t \to \infty$. □

Exercice 9. Comme b est lipschitzienne, il existe une constante $K \in]0, \infty[$ telle que $|b(u) - b(v)| \le K\,|u - v|$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $X_t^{x,\varepsilon} - y^x(t) = \varepsilon B_t + \int_0^t [b(X_s^{x,\varepsilon}) - b(y^x(s))]\,\mathrm{d}s$, et donc $\sup_{s\in[0,t]} |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)| \le \varepsilon B_t^* + K\int_0^t |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)|\,\mathrm{d}s$, où $B_t^* := \sup_{s\in[0,t]} |B_s|$. Par le lemme de Gronwall, ceci implique que $\sup_{s\in[0,t]} |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)| \le \varepsilon B_t^* \mathrm{e}^{Kt}$, $t \in [0, 1]$. En particulier, si l'on note $V := \sup_{s\in[0,1]} |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)|$, alors $V \le \varepsilon B_1^* \mathrm{e}^K$. Donc $\mathbb{P}(V > \delta) \le \mathbb{P}(B_a^* > \frac{\delta \mathrm{e}^{-K}}{\varepsilon}) = \mathbb{P}(B_1^* > \frac{\delta \mathrm{e}^{-K}}{\varepsilon}) = \mathbb{P}(B_1^* > \frac{C}{\varepsilon})$, avec $C := \delta \mathrm{e}^{-K}$. Par symétrie, ceci donne $\mathbb{P}(V > \delta) \le 2\,\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,1]} B_s > \frac{C}{\varepsilon}) = 2\,\mathbb{P}(|B_1| > \frac{C}{\varepsilon}) = 4\,\mathbb{P}(B_1 > \frac{C}{\varepsilon}) \le 4\exp(-\frac{C^2}{2\varepsilon^2}) = 4\exp(-\delta^2 e^{-2K}/\varepsilon^2)$. □

Exercice 10. (i) Par définition,

$$X_{t\wedge\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^t X_s(1 - X_s^2)\,\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s(1 - X_s^2)(1 + 3X_s^2)\,\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

qui est à valeurs dans $]0, 1[$ car $X_{t\wedge\tau} \le \max\{\gamma, \frac{1}{\sqrt{2}}\} < 1$ par définition.

Considérons la fonction $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \frac{x^2}{1-x^2}$ pour $x \in]0, 1[$, qui est de classe C^2 avec $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ et $f''(x) = \frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$. On peut donc appliquer la formule d'Itô à $(X_{t\wedge\tau},\, t \ge 0)$ et à f ; puisque $U_t = f(X_{t\wedge\tau})$, cela donne :

$$\begin{aligned} U_t &= f(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \int_0^t f'(X_{s\wedge\tau}) X_s(1 - X_s^2)\,\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\,\mathrm{d}B_s \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^t f'(X_{s\wedge\tau}) X_s(1 - X_s^2)(1 + 3X_s^2)\,\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s\wedge\tau})X_s^2(1-X_s^2)^2\,\mathbf{1}_{[0,\,\tau]}(s)\,\mathrm{d}s \\ = \;\; & 1+2\int_0^t \frac{X_s^2}{1-X_s^2}\,\mathbf{1}_{[0,\,\tau]}(s)\,\mathrm{d}B_s. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un processus d'Itô, dont la valeur initiale est 1, la partie intégrale stochastique (par rapport au mouvement brownien) vaut $2\int_0^t \frac{X_s^2}{1-X_s^2}\,\mathbf{1}_{[0,\,\tau]}(s)\,\mathrm{d}B_s$, et la partie à variation finie est nulle.

(ii) Il suffit de prouver que $\int_0^t \frac{X_s^2}{1-X_s^2}\,\mathbf{1}_{[0,\,\tau]}(s)\,\mathrm{d}B_s$ est une martingale.

Considérons le processus adapté $H_t := \frac{X_t^2}{1-X_t^2}\,\mathbf{1}_{[0,\,\tau]}(t)$, $t \ge 0$. Comme H est borné (car $X_t \le \max\{\gamma,\, \frac{1}{\sqrt{2}}\} < 1$ pour tout t), on a $\mathbb{E}[\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s] < \infty$, $\forall t$; donc $(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}B_s,\, t \ge 0)$ est une martingale (de carré-intégrable).

(iii) Il n'y a rien à prouver si $\gamma \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. On suppose donc dans cette question que $\gamma > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas, $X_\tau = \gamma$ sur $\{\tau < \infty\}$.

Rappelons que $U_t = f(X_{t\wedge\tau})$. On fait $t \to \infty$: $U_t\,\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \to f(\gamma)\,\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}$; par le lemme de Fatou, $\mathbb{E}[f(\gamma)\,\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}] \le \liminf_{t\to\infty}\mathbb{E}[U_t\,\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}] \le \liminf_{t\to\infty}\mathbb{E}[U_t]$ qui vaut 1 d'après la question précédente. Donc $\mathbb{P}(\tau<\infty) \le \frac{1}{f(\gamma)} = \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$.

(iv) On sait que $\mathbb{P}(\tau=\infty) \ge 1-\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}\{X_t<\gamma,\ \forall t\ge 0\} \ge 1-\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$. A fortiori, $\mathbb{P}\{X_t<1,\ \forall t \ge 0\} \ge 1-\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$. En faisant $\gamma \to 1$, on voit que $\mathbb{P}\{X_t<1,\ \forall t \ge 0\} = 1$.

(v) D'après (i), $\frac{X_{t\wedge\tau}^2}{1-X_{t\wedge\tau}^2} = 1+2\int_0^t \frac{X_s^2}{1-X_s^2}\,\mathbf{1}_{[0,\,\tau]}(s)\,\mathrm{d}B_s = 1+2\int_0^{t\wedge\tau}\frac{X_s^2}{1-X_s^2}\,\mathrm{d}B_s$. On fait $\gamma \uparrow 1$, alors $\tau \uparrow \infty$ p.s. (par (iv)) ; on obtient donc

$$V_t = 1+2\int_0^t V_s\,\mathrm{d}B_s.$$

Il s'agit d'une EDS avec $\sigma(t,\,x) := 2x$ et $b(t,\,x) := 0$ pour $(t,\,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

(vi) On a vu dans le cours que l'unique solution pour l'EDS qui définit le processus V est $V_t = \mathrm{e}^{2(B_t-t)}$, $t \ge 0$. Autrement dit, $X_t = (\frac{V_t}{1+V_t})^{1/2} = (\frac{\mathrm{e}^{2(B_t-t)}}{1+\mathrm{e}^{2(B_t-t)}})^{1/2} = (\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2(B_t-t)}})^{1/2}$. $\square$